Chapitre 2

Logique et Calcul Propositionnel

“ *La logique est la jeunesse des mathématiques et les mathématiques sont l'âge viril de la logique.*”

B. Russell, Introduction à la philosophie mathématique.

L'ensemble des résultats présentés dans les deux chapitres qui suivent sont développés de manière détaillée dans un support de cours [42].

2.1 Syntaxe

2.1.1 Définition informelle

La logique des propositions est construite sur la base d'un système formel dont nous donnons ici une définition. La *syntaxe* de ce système permet d'écrire des phrases dans une langue particulière, celle de la logique des propositions ou calcul propositionnel. La syntaxe permet de formaliser la notion de démonstration, qui en logique, est une suite de formules qui sont obtenues par l'intermédiaire d'un procédé mécanique[1] déterministe. Il s'agit en fait de **construire une théorie de la déduction.**

Une déduction met en jeu une prémisse, qui si elle est vraie, engendre une conclusion. Nous pouvons alors affirmer que nous tentons de formaliser des raisonnements du type : si *prémisse* alors *conclusion*, dont le schéma structurel prend la forme *si P alors C.*

Nous risquons alors la confusion entre les phrases du langage que nous construisons (qui contiennent des structures *si alors*) et notre propre langue (le français) qui utilisera probablement les mêmes structures pour décrire cette nouvelle langue.

Il semble alors évident que la construction de la logique en tant que langue pose un problème, à savoir, déterminer à quel niveau de langage on se trouve. Considérons, par exemple, la phrase suivante :

si la formule H est vraie et si l'on sait que si H alors F, alors on en déduit F.

On distingue dans cette phrase deux structures *si alors*. La première correspond à ce que **Tarski** appelle la *métalangue* (ou langue de l'observateur – dans le cas présent le français) utilisée pour construire les formules. Le deuxième *si alors* appartient à la *langue objet* (i.e. celle qui est prise comme objet d'une théorie) donc au calcul propositionnel. Nous utiliserons donc des représentations différentes suivant le niveau de langage. En particulier, *si P alors C* s'écrira $P \to C$ en calcul propositionnel. La phrase précédente s'énonce donc :

si la formule H est vraie et si l'on sait que si $H \to F$, alors on en déduit F.

Nous donnons à présent la syntaxe du calcul propositionnel sous forme d'un système formel.

[1]le mot *mécanique* devant être compris ici au sens de *récursif*.

2.1.2 Définition formelle

Définition 2.1.1 - Alphabet - *L'alphabet du calcul propositionnel est défini par un ensemble de symboles répartis en :*

- symboles de vérité *:* $\top$ *et* $\bot$*,*
- variables propositionnelles *: un ensemble infini dénombrable* $V = \{p, q, r, \ldots\}$ *de variables propositionnelles ou atomes qui sont des énoncés dont on ne connaît pas la signification,*
- signes de ponctuation *: (et)*
- connecteurs logiques *: qui sont des opérateurs reliant les variables propositionnelles,*

Connecteur mono-adique	$\neg$	*négation*
Connecteurs di-adiques	$\wedge$	*conjonction*
	$\vee$	*disjonction*
	$\rightarrow$	*implication*
	$\equiv$	*équivalence*

Définition 2.1.2 - Formules bien formées - *L'ensemble des formules bien formées (fbf) du calcul propositionnel est défini inductivement par :*

– $\top$ *et* $\bot$ *sont des formules bien formées,*
– *les atomes sont des formules bien formées,*
– *si* A *est une formule bien formée , alors* (A)*,* $(\neg A)$ *sont des formules bien formées,*
– *si* A *et* B *sont des formules bien formées, alors* $(A \wedge B)$*,* $(A \vee B)$*,* $(A \rightarrow B)$*,* $(A \equiv B)$ *sont des formules bien formées,*
– *toute formule bien formée est obtenue par application des règles précédentes un nombre fini de fois.*

Ainsi, $((p \rightarrow q) \vee (p \equiv r))$ et $(((\neg p) \wedge \top) \vee ((q \rightarrow s) \vee r))$ sont des exemples de formules bien formées.

Définition 2.1.3 - Littéral - *On fait parfois la différence entre les atomes précédés du symbole de négation* $\neg$ *et ceux qui ne le sont pas : on qualifie les premiers de littéraux négatifs et les seconds de littéraux positifs.*

2.2 Axiomatique

L'axiomatique, c'est-à-dire les axiomes et les règles d'inférence, permet de distinguer les assemblages de mots qui font partie du langage, appelés *théorèmes*, de ceux qui n'en font pas partie appelés *non théorèmes*. En particulier, les axiomes sont des théorèmes.

Définition 2.2.1 - Axiomes - *Les axiomes du calcul propositionnel sont au nombre de trois :*

(A1)	$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$	*(conséquence de l'hypothèse)*
(A2)	$\vdash (A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	*(auto distributivité de* $\rightarrow$*)*
(A3)	$\vdash (\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	*(contraposition partielle)*

L'axiome **(A3)** est parfois remplacé par $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$.

Définition 2.2.2 - Règle d'inférence - *Le calcul propositionnel utilise une seule règle d'inférence appelée règle du* Modus Ponens *également qualifiée de règle de* détachement *:*

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash (A \rightarrow B)}{\vdash B}\ (MP)$$

qui peut se lire : si A *est un théorème et si* $A\rightarrow B$ *est aussi un théorème alors* B *est un théorème*

En fait, on utilise également une autre règle, dite règle de *substitution* mais celle-ci n'est généralement pas énoncée directement, puisque profondément enfouie dans la structure des axiomes. Les axiomes sont en fait des *schémas d'axiomes*, c'est à dire que les lettres A, B, C représentent des formules quelconques. Soient p, q deux variables propositionnelles. En remplaçant A par p et B par q dans **(A1)**, on obtient $p \to (q \to p)$. De même, en remplaçant A par q et B par p, on a $q \to (p \to q)$, etc.

Définition 2.2.3 - Démonstration - *Une démonstration d'un théorème A est une suite finie $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ où chaque L_i est soit un axiome, soit obtenu par l'application de la règle d'inférence du Modus Ponens sur les théorèmes L_j et L_k précédemment produits $(j, k < i)$. On note alors $\vdash A$ qui peut se lire A est un théorème.*

2.2.1 Notion de déduction

Nous le notions en introduction de ce chapitre : il s'agit pour nous d'élaborer une théorie de la déduction. Le théorème suivant va nous permettre d'atteindre notre but en formalisant la notion de déduction.

Définition 2.2.4 - Déduction - *Une formule F se déduit d'un ensemble de formules $H = (H_1, H_2, \ldots, H_n)$, s'il existe une suite finie $(L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots, L_m, F)$ où chaque L_i est soit un axiome, soit un des H_i, soit obtenu par l'application de la règle du* Modus Ponens *sur deux éléments L_j, L_k de la suite déjà obtenue $(j, k < i)$. Dans ce cas, on note $H \vdash F$.*

Ainsi, la formule $p \to r$ se déduit de $H = \{(p \to q), (q \to r)\}$:

1	$\vdash p \to q$	
2	$\vdash q \to r$	
3	$\vdash ((p \to q) \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Axiome **(A2)** avec $A = p, B = q, C = r$
4	$\vdash (q \to r) \to (p \to (q \to r))$	Axiome **(A1)** avec $A = q \to r, B = p$
5	$\vdash p \to (q \to r)$	$MP(2,4)$
6	$\vdash (p \to q) \to (p \to r)$	$MP(5,3)$
7	$\vdash p \to r$	$MP(1,6)$
	$\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$	

Théorème 2.2.1 - Théorème de déduction formelle - *Soit H un ensemble de formules et $G \in H$. $H \vdash F \iff H \setminus \{G\} \vdash G \to F$. En particulier,*

$$H \vdash F \iff \vdash H \to F$$

Définition 2.2.5 - Théorie - *On appelle théorie le système formel composé du système formel du calcul propositionnel dont les axiomes sont augmentés par un ensemble de formules H. Les formules de H constituent le fondement de la théorie et sont donc tenues comme vraies.*

Nous allons prendre un exemple assez simpliste pour illustrer notre propos. Considérons que nous ayons pu noter que les faits suivants se répétaient assez fréquemment :

- s'il fait beau alors je fais du vélo,
- si je fais du vélo alors il y a du vent,

Nous voudrions étudier ces faits et déterminer s'il existe une relation entre-eux. Nous allons pour cela construire une théorie T à partir des faits observés. Convenons de remplacer *il fait beau* par la variable propositionnelle p, *je fais du vélo* par q et *il y a du vent* par r. La représentation des faits en tant que formules logiques donne respectivement : $p \to q$ et $q \to r$. En utilisant les résultats précédents, nous pouvons conclure $p \to r$, soit *s'il fait beau alors il y a du vent.* Ce qui constitue, somme toute, une loi météorologique discutable à l'échelle de la réalité, mais valide du point de vue de la théorie.

2.3 Sémantique

Nous devons à présent donner un sens aux formules afin de pouvoir les interpréter. Pour celà nous allons commencer par donner un sens aux variables propositionnelles qui apparaissent dans les formules : nous associons donc à chaque variable, une *valeur de vérité* qui est soit la valeur t (*vrai*), soit la valeur f (*faux*). En particulier, le symbole $\top$ a pour valeur de vérité t, et $\bot$ a pour valeur f.

Définition 2.3.1 - Valuation - *On appelle valuation d'un ensemble de variables propositionnelles $W \subseteq V$, une application de W dans $\{t, f\}$ (voir figure 2.1.)*

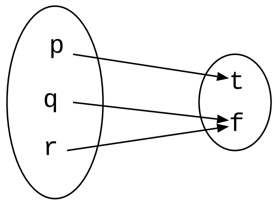

Fig. 2.1 – Exemple de valuation $p = t, q = f, r = f$

Définition 2.3.2 - Interprétation - *Une interprétation I d'une formule F est une valuation des variables de F.*

On associe ensuite à chaque connecteur logique, une table de vérité, qui détermine de manière univoque la valeur de vérité du connecteur en fonction de ses opérandes.

Définition 2.3.3 - Fonction d'interprétation - *On appelle fonction d'interprétation ρ, une fonction qui évalue la valeur de vérité d'une formule en fonction des connecteurs logiques (cf. table 2.1) et d'une interprétation de la formule.*

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \equiv q$
f	f	t	t	t	f	f	t
f	t	t	f	t	t	f	f
t	f	f	t	f	t	f	f
t	t	f	f	t	t	t	t

Tab. 2.1 – Interprétation des connecteurs usuels

Soit I une interprétation d'une formule F. On note $\rho(F, I)$, le résultat de l'évaluation de F par I.

Par exemple, l'interprétation de la formule $F = ((p \vee q) \rightarrow (q \wedge r))$ pour l'interprétation $I = \{p = t, q = t, r = f\}$ est :

1. $F_1 = (p \vee q)$, $\rho(F_1, I) = t$,
2. $F_2 = (q \wedge r)$, $\rho(F_2, I) = f$,
3. $F = (F_1 \rightarrow F_2)$, $\rho(F, I) = f$.

Définition 2.3.4 - Modèle d'une formule - *Un modèle d'une formule F est une interprétation I de F telle que $\rho(F, I) = t$. Si I est un modèle de F, on note $I \models F$.*

Définition 2.3.5 - Formule satisfiable (ou consistante) - *Une formule F est dite satisfiable ou consistante, s'il existe une interprétation I de F telle que $I \models F$. En d'autres termes, une formule satisfiable possède au moins un modèle.*

Définition 2.3.6 - Tautologie (ou formule valide) - *Une tautologie ou formule valide est une formule F vraie dans toute interprétation, quelles que soient les valeurs de vérité des atomes qui la composent. On note alors $\models F$.*

En particulier, les axiomes sont des tautologies.

Définition 2.3.7 - Formule insatisfiable - *Une formule fausse dans toute interprétation est appelée antitautologie ou est dite insatisfiable.*

Si F est une tautologie, alors $\neg F$ est une formule insatisfiable et inversement.

Exemples :

$(p \wedge \neg p)$	est insatisfiable
$(p \vee \neg p)$	est une tautologie ou formule valide
$(p \rightarrow (\neg p))$	est consistante

Définition 2.3.8 - Ensemble insatisfiable de formules - *Un ensemble H de formules est insatisfiable, si et seulement si il n'existe aucune interprétation I de H telle que toutes les formules de H soient satisfaites par I.*

Définition 2.3.9 - Conséquence Valide - *Soit une formule F et un ensemble de formules H. On dit que F est conséquence valide de H si tout modèle de H est modèle de F. On note alors $H \models F$.*

Théorème 2.3.1 - Théorème sémantique de la déduction - *Soit F une formule et H un ensemble de formules.*

$$H \models F \quad \Longleftrightarrow \quad \models H \rightarrow F$$

Théorème 2.3.2 - Théorème de déduction par réfutation - *Soit F une formule et H un ensemble de formules, alors*

$$H \models F \quad \Longleftrightarrow \quad H \wedge \neg F \textit{ est insatisfiable}$$

Ce théorème est à la base de nombreuses méthodes de résolution des problèmes de la logique.

Théorème 2.3.3 - Théorème de compacité - *Soit H un ensemble de formules. Si toute partie finie de H est satisfiable alors H est satisfiable.*

Corollaire 2.3.1 - *Un ensemble de formules H est insatisfiable si une partie finie de H est insatisfiable.*

2.4 Propriétés fondamentales

Le calcul propositionnel jouit d'un certain nombre de propriétés relatives aux systèmes formels. Nous reprenons ici les définitions données dans [2] :

2.4.1 Consistance

Définition 2.4.1 - Consistance - *Une logique est dite (syntaxiquement) consistante s'il n'existe aucune formule F telle que $\vdash F$ et $\vdash \neg F$.* [2]

Théorème 2.4.1 - Consistance du calcul propositionnel - *Le calcul propositionnel est consistant.*

En particulier la formule bien formée $\neg(p \rightarrow p)$ n'est pas un théorème car $p \rightarrow p$ est un théorème (appelé $(T1)$ dans ce chapitre).

[2]La propriété de consistance s'énonce également en disant qu'il existe des formules bien formées qui ne sont pas des théorèmes.

2.4.2 Adéquation

Définition 2.4.2 - Adéquation - *Une logique est dite adéquate*[3] *si tout théorème* ($\vdash F$) *est une formule valide* ($\models F$).

Théorème 2.4.2 - Adéquation du calcul propositionnel - *Le calcul propositionnel est adéquat.*

2.4.3 Complétude

Définition 2.4.3 - Complétude faible - *Une logique est dite faiblement complète si toute formule valide* ($\models F$) *est un théorème* ($\vdash F$).

Définition 2.4.4 - Complétude forte - *Une logique est dite fortement complète ssi la relation de conséquence valide correspond à la relation de déduction : Soit H un ensemble de formules, si $H \models F$ alors $H \vdash F$.*

Théorème 2.4.3 - Complétude du calcul propositionnel - *Le calcul propositionnel est fortement complet.*

En d'autres termes, un calcul est dit fortement complet si l'adjonction à des schémas d'axiomes d'un schéma de formule qui n'est pas démontrable, le rend non consistant. Le théorème de complétude forte établit l'équivalence entre syntaxe et sémantique, ce qui signifie que $\vdash$ et $\models$ sont interchangeables.

Remarquons qu'il ne faut pas confondre la notion de complétude précédente avec la notion de complétude syntaxique et celle de complétude pour une procédure de preuve.

Définition 2.4.5 - Complétude syntaxique - *Une logique est dite syntaxiquement complète ssi, pour toute formule F, on a soit $\vdash F$, soit $\vdash \neg F$.*

Théorème 2.4.4 - Incomplétude syntaxique du calcul propositionnel - *Le calcul propositionnel est syntaxiquement incomplet.*

2.4.4 Décidabilité

Définition 2.4.6 - Décidabilité - *Une logique est décidable s'il existe une procédure mécanique qui permet d'établir en un temps fini si une formule est ou non un théorème.*

Théorème 2.4.5 - Décidabilité du calcul propositionnel - *Le calcul propositionnel est décidable.*

2.5 Formes normales

Les formes normales partent du principe que les connecteurs $\rightarrow$ et $\equiv$ peuvent s'exprimer de manière équivalente en fonction de $\wedge$ et $\vee$ qui sont des connecteurs avantageux puisque commutatifs et associatifs. En conséquence, dans une conjonction ou une disjonction de littéraux l'ordre d'apparition des littéraux et la disposition des parenthèses n'ont pas d'importance.

Définition 2.5.1 - Formules équivalentes - *Deux formules sont dites équivalentes si elles possèdent la même table de vérité.*

Définition 2.5.2 - Clause - *Une clause est une disjonction de littéraux de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_m$.*

Définition 2.5.3 - Clause unitaire - *Une clause unitaire est une clause composée d'un seul littéral.*

Définition 2.5.4 - Clause de Horn - *Une clause de Horn est une clause composée au maximum d'un littéral positif et d'au moins un littéral négatif.*

[3] *sound* en anglais.

Définition 2.5.5 - Forme normale conjonctive - *Une formule F est sous forme normale conjonctive (FNC)*[4] *lorsqu'elle s'écrit $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, où chaque F_i, est une clause.*

Définition 2.5.6 - Forme normale disjonctive - *Une formule F est sous forme normale disjonctive (FND)*[5] *lorsqu'elle s'écrit $F = F_1 \vee \ldots \vee F_n$, où chaque F_i, $1 \leq i \leq n$ est une conjonction de littéraux de la forme $F_i = l_1 \wedge \ldots \wedge l_m$.*

Théorème 2.5.1 - Théorème de normalisation - *Toute formule admet une forme normale conjonctive et disjonctive qui lui est logiquement équivalente.*

La transformation d'une formule sous forme normale (conjonctive ou disjonctive) se réalise facilement par application des règles d'associativité, distributivité et commutativité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

Théorème 2.5.2 - FNC et validité - *La mise sous forme normale conjonctive est un procédé de décision pour la recherche de validité d'une formule.*

Théorème 2.5.3 - FND et insatisfiabilité - *La mise sous forme normale disjonctive est un procédé de décision pour la recherche d'insatisfiabilité d'une formule.*

[4] ou CNF pour Conjunctive Normal Form.
[5] ou DNF pour Disjunctive Normal Form.