Chapitre 1

Systèmes formels

Car quant à l'ordre universel, tout y est conforme. Ce qui est si vray que, non seulement rien n'arrive dans le monde qui soit absolument irrégulier, mais on ne sçauroit même rien feindre de tel. [...] *Et il n'y a, par exemple, point de visage dont le contour ne fasse partie d'une ligne géométrique et ne puisse estre tracé tout d'un trait par un certain mouvement réglé. Mais quand une règle est fort composée, ce qui luy est conforme, passe pour irrégulier.*

LEIBNIZ, Discours de la Métaphysique, VI

Ainsi, tout système formel n'est qu'un reflet partiel de nos possibilités mentales. Il est un miroir qui ne rend compte qu'incomplètement du fonctionnement de notre esprit. A s'y mirer l'esprit s'y appauvrit.

GÉRARD CHAZAL, Le Miroir Automate, p. 72

1.1 Axiomatiser - Formaliser

Si toute connaissance procède à ses débuts de façon naïve, son achèvement demande une élaboration plus soigneuse sous forme d'une **théorie axiomatisée** ou celle d'un **système formel**, notions parentes, mais qui se différencient par certains aspects[1] :

- *Axiomatiser* une théorie consiste à rechercher un certain nombre de propriétés initiales ou primitives, en fonction desquelles on déduira toutes les vérités de la théorie, qualifiées de *théorèmes*. La géométrie euclidienne représente le premier exemple de théorie axiomatisée.
- *formaliser* une théorie, par contre, comporte deux étapes ; la première étant de construire un système formel de la théorie, la seconde visant à donner une interprétation au système formel obtenu.

1.2 Définition informelle

"*Le but d'un système formel est de* **cerner mécaniquement une "réalité"** *dans le but de pouvoir produire toutes ses vérités*" ([4], p. 17), et par là même, de **débarrasser cette vérité de toute affectivité, ou de toute incursion métaphysique**.

Un système formel est une entité idéale qui engendre sous forme de *théorèmes* toutes les conséquences qui découlent selon des critères déterminés (règles) d'un ensemble de propositions initiales considérées comme vérités premières (axiomes). Les expressions qui figurent dans un système formel n'ont aucun sens et résultent des possibilités opératoires précisées dans les règles de maniement du système. Lorsqu'on construit un système formel c'est en général avec l'intention de représenter dans ce système une théorie non formalisée. Le but de la formalisation est alors de

[1] en un certain sens, on pourrait arguer que l'axiomatisation est une activité purement humaine, alors que la formalisation se conforme aux possibilités opératoires des calculateurs.

permettre une étude précise et systématique des aspects structuraux des théories scientifiques. Cependant, ainsi que le montrent les théorèmes de limitation (Gödel, Tarski), il n'est pas possible d'obtenir une représentation formelle adéquate d'une théorie, dès que celle-ci a une certaine ampleur.

1.3 Syntaxe - Définition formelle

Dans son principe, un système formel (abrégé en SF) est un procédé mécanique de construction des phrases d'un langage composé dans ce but d'un ensemble fini de briques élémentaires (ou *axiomes*) et d'un ensemble fini de règles de construction des phrases (appelées règles de *déduction*, de *production* ou d'*inférence*).

Définition 1.3.1 - Système Formel - *Un système formel* $\mathcal{S}_F = \langle V, L, R \rangle$ *est défini par la donnée :*

- *d'un* alphabet V *qui est composé d'un ensemble fini de symboles,*
- *d'un* langage L *sur* V*, définissant les mots reconnus par le SF et qualifiés de formules bien formées (fbf en abrégé) ,*
- *d'un procédé mécanique de formation des mots et phrases de* L*, appelé* syntaxe *(R), composé par :*
  - *un ensemble fini d'axiomes qui sont des phrases de* L*,*
  - *un ensemble fini de règles de déduction qui permettent de créer de nouvelles phrases de* L*, appelées théorèmes, à partir des axiomes.*

Définition 1.3.2 - Théorème - *Un théorème est le dernier mot obtenu après application d'une ou plusieurs règles d'inférence sur un axiome.*

Définition 1.3.3 - Démonstration - *Une démonstration d'un théorème* A *dans un système formel* $\mathcal{S}_F$ *est une suite finie* $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$ *ou chaque* A_i *est soit un axiome, soit le résultat de l'application d'une règle d'inférence sur un* A_j *qui le précède. On note alors* $\vdash A$*. On dit également que* A *est* prouvable *par le système formel* $\mathcal{S}_F$*.*

Définition 1.3.4 - Déduction - *Un théorème* A *se déduit d'un ensemble* $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ *de formules, s'il existe une suite finie* $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A)$ *où chaque* A_i *est soit un axiome, soit un des* B_i*, soit le résultat de l'application d'une règle d'inférence sur un* A_j *qui le précède. On note alors* $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$*. On dit également que* A se déduit *de* $B_1, B_2, \ldots, B_n$*.*

Exemple - le MU puzzle Soit le système formel appelé MU et défini par :
- un alphabet : $V = \{M, I, U\}$,
- un langage L formé des mots commençant par M, suivi de séquences particulières de I et de U (voir les règles),
- d'un unique axiome MI.
- des règles : soit α et β des mots de V^*,
  - $[r_1]$: $\alpha I \rightarrow \alpha IU$
  - $[r_2]$: $M\alpha \rightarrow M\alpha\alpha$
  - $[r_3]$: $\alpha III\beta \rightarrow \alpha U\beta$
  - $[r_4]$: $\alpha UU\beta \rightarrow \alpha\beta$

Les premiers théorèmes obtenus par application des règles d'inférence sur l'axiome MI sont représentés figure 1.1 :

1.4 Sémantique et interprétation

Bien que les systèmes formels semblent susciter la curiosité du logicien et procurer un plaisir ludique à celui qui les découvre, leur intérêt pratique apparaît rapidement limité dès lors que l'on

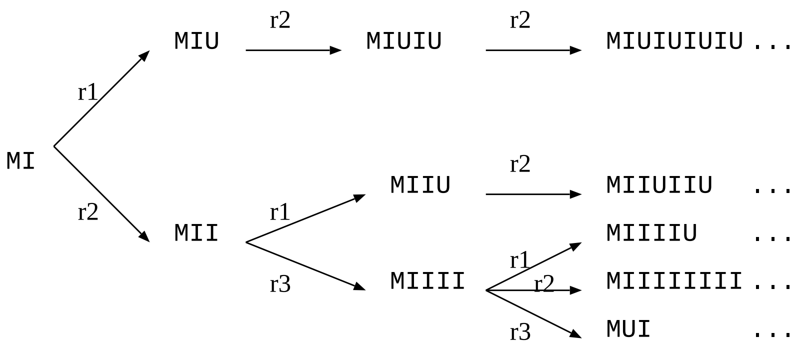

FIG. 1.1 – Premiers théorèmes du système formel MU

se cantonne à l'étude de leurs propriétés syntaxiques. Le *MU-puzzle*, s'il suscite notre curiosité pendant un instant, ne peut, semble-t-il, faire aucune incursion dans le monde réel. Le rapport à la réalité matérielle est primordial, les systèmes formels prennent en effet tout leur sens par la mise en relation des théorèmes, obtenus de manière mécanique, avec les *assertions* de théories non formalisées.

Définition 1.4.1 - Assertion - *Une assertion A d'une théorie non formalisée $\mathcal{T}$ est une proposition vraie dans cette théorie. On note alors $\models A$.*

Définition 1.4.2 - Interprétation - *Une interprétation I est une mise en correspondance entre théorèmes ($\vdash A$) et assertions ($\models A$).*

Exemple : Soit le système formel, que nous appellerons ADD, défini par :
- un alphabet : $V = \{0, 1, p, e\}$,
- un langage L sur V dont les formules bien formées sont de la forme $0\{1\}^*p\,0\{1\}^*e\,0\{1\}^*$[2],
- un unique axiome : $0p0e0$.
- les règles : soit $m = 0\alpha_1 p0\alpha_2 e0\alpha_3$ un mot de ADD tel que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1\}^*$
  - $[r_1]$: $m \rightarrow 0\alpha_1 1p0\alpha_2 e0\alpha_3 1$
  - $[r_2]$: $m \rightarrow 0\alpha_1 p0\alpha_2 1e0\alpha_3 1$

Les premiers théorèmes sont :

$$0p0e0,\ 01p0e01,\ 0p01e01,\ 01p01e011, \ldots$$

Convenons à présent de donner une signification à notre système. Substituons p par $+$ et e par $=$. Une suite de n chiffres 1 précédée par un 0 sera remplacée par le nombre n correspondant dans l'ensemble des entiers naturels. Ainsi, 0 sera remplacé par 0, 01 par 1, 011 par 2, etc. Les théorèmes obtenus précédemment se réécrivent alors :

$$0 + 0 = 0,\ 1 + 0 = 1,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 2,\ \cdots$$

Il semble alors évident que le système formel ADD modélise le comportement de l'addition pour les entiers naturels. Les théorèmes qu'il engendre sont des assertions vraies au sens de l'arithmétique.

1.5 Propriétés des systèmes formels

Dans son principe un système formel est un ensemble de signes dont on explique comment les combiner pour obtenir des *termes*. On montre ensuite comment combiner les termes pour former

[2] nous employons ici une notation usitée pour décrire les langages formels ; l'expression $\{1\}^*$ représente une suite éventuellement vide de chiffres 1.

une classe d'expressions dites formules bien formées (*fbf*). Enfin un ensemble de règles, dites *règles de production* définit comment obtenir les théorèmes (ou vérités du système) à partir d'un sous-ensemble de *fbf* particulières appelées *axiomes* et considérées comme vérités primitives.

Il semble alors évident que la compréhension du domaine dans lequel on travaille n'est pas nécessaire lorsque l'on fait appel à un système formel, procédé purement mécanique. Malgré tout, un système formel se doit de répondre à certaines propriétés, auquel cas, il ne saurait être considéré comme un outil de démonstration valable.

La première propriété à laquelle un système formel doit naturellement obéir est la propriété de *conformité* :

Définition 1.5.1 - Conformité - *Un système formel $\mathcal{S}_F = \langle V, L, R\rangle$ est dit conforme si les axiomes et règles de déduction permettent effectivement de générer des mots de L.*

Parfois L n'est pas précisé explicitement et est alors défini par les axiomes et les règles d'inférence.

Définition 1.5.2 - Consistance - *Un système formel $\mathcal{S}_F$ est dit syntaxiquement consistant (ou non contradictoire) si on ne peut prouver à la fois un théorème A et son contraire.*

Un système non consistant est dit *inconsistant.*

Définition 1.5.3 - Validité - *Un système formel $\mathcal{S}_F$, associé à une théorie non formalisée $\mathcal{T}$, est dit valide*[3] *si tout théorème ($\vdash A$) engendré par $\mathcal{S}_F$ est une assertion ($\models A$) de $\mathcal{T}$.*

Définition 1.5.4 - Complétude - *Un système formel $\mathcal{S}_F$, associé à une théorie non formalisée $\mathcal{T}$, est dit complet si toute assertion ($\models A$) de $\mathcal{T}$ correspond à un théorème ($\vdash A$) de $\mathcal{S}_F$.*

Un système formel idéal (cf. figure 1.2) repose sur une adéquation parfaite entre théorèmes et assertions. Il est donc à la fois

- *valide :* chaque théorème correspond à une assertion de la théorie,
- *complet :* toute assertion est engendrée sous forme de théorème.

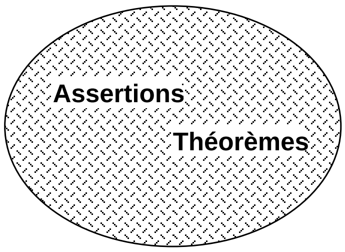

FIG. 1.2 – Système formel idéal

Cependant, certains SF bien que *valides* sont *incomplets*, ce qui signifie que le SF n'est pas assez puissant pour produire toutes les assertions de la théorie sous forme de théorèmes (cf. figures 1.3).

Définition 1.5.5 - Décidabilité - *On dit qu'un système formel $\mathcal{S}_F = \langle V, L, R\rangle$ est décidable s'il existe une procédure mécanique permettant d'établir en un temps fini si une phrase du langage L est ou n'est pas un théorème.*

Définition 1.5.6 - Procédure de Décision - *Une procédure de décision pour un système formel $\mathcal{S}_F = \langle V, L, R\rangle$ est un algorithme capable d'établir en un temps fini si une phrase du langage L est ou n'est pas un théorème.*

Définition 1.5.7 - Semi-Décidabilité - *On dit qu'un système formel $\mathcal{S}_F = \{V, L, R\}$ est semi-décidable s'il existe une procédure mécanique capable d'établir en un temps fini les théorèmes du langage.*

Dans ce cas, si un mot w du langage L n'est pas un théorème, il se peut que la procédure de décision associée au SF ne termine pas (voir figures 1.4 et 1.5).

[3]on dit également adéquat ou sain, traduction du terme anglais *sound*.

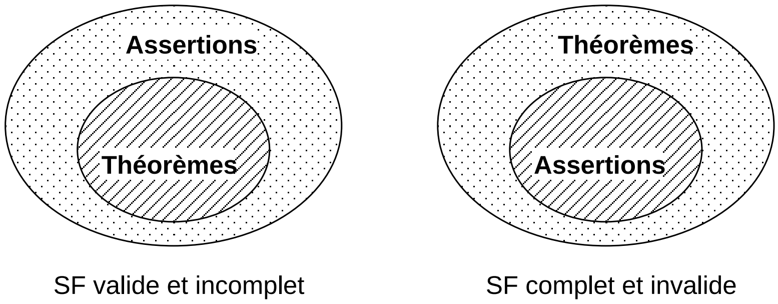

FIG. 1.3 – validité et complétude

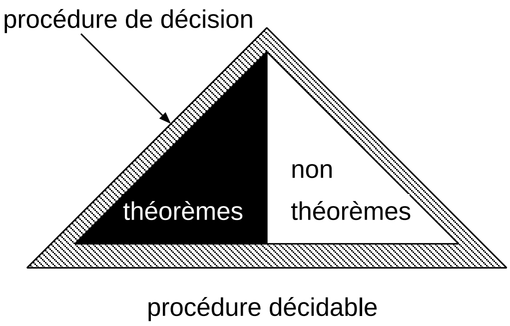

FIG. 1.4 – Système formel décidable

1.6 Limites de la formalisation

1.6.1 Théorème de Gödel

Kurt **Gödel** démontre en 1931 que tout système formel de l'arithmétique est forcément incomplet et ne peut prouver sa propre consistance.

Théorème 1.6.1 Gödel 1931 - *L'arithmétique de Peano* PA *est incomplète, c'est à dire, il existe une phrase* F *telle que* $PA \nvdash F$ *et* $PA \nvdash \neg F$.

Pour une description de l'arithmétique de **Peano** voir [1] p. 94 ou [2] p. 85.

Rosser montrera également quelques années plus tard l'incomplétude de l'arithmétique en relâchant les propriétés associées à la $\omega - consistance$ ([1], p. 178).

Théorème 1.6.2 Gödel/Rosser 1936 - *Pour tout système formel* $\mathcal{S}_F$ *non contradictoire (tel qu'on ne puisse dériver une proposition et son contraire) et qui est une modélisation de l'arithmétique*

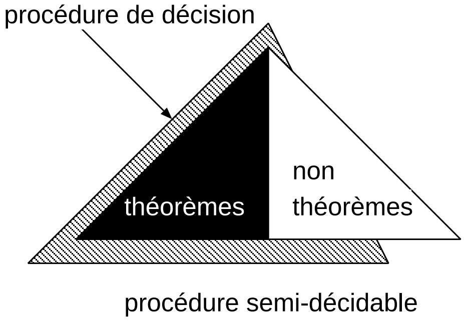

FIG. 1.5 – Système formel semi-décidable

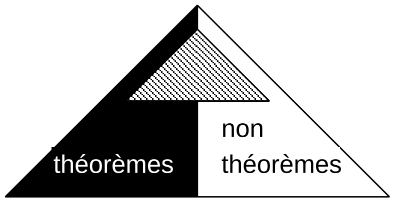

FIG. 1.6 – Système formel de l'arithmétique

récursive, il existe des propositions indécidables (ni prouvable, ni réfutable[4]).

La démonstration du théorème de Gödel est assez complexe, le lecteur intéressé voudra bien se référer à [1], p. 169, mais l'idée générale de la démonstration est foncièrement habile. Elle s'articule autour de la construction d'une proposition p, affirmant qu'elle n'est pas dérivable dans le système formel (ce que Douglas Hofstadter [20] qualifie d'assertion auto-référentielle ou encore de Boucle Étrange). Si on parvient à démontrer p alors le SF est inconsistant. En revanche, si on ne peut prouver p, p est vraie mais indémontrable, $\mathcal{F}$ est donc incomplet.

Ce schéma de raisonnement se fonde sur le *paradoxe du menteur* d'**Épiménide**. Épiménide, penseur crétois affirmait la proposition suivante : *tous les crétois sont des menteurs.* Si l'on considère que cette proposition est vraie, alors, en raison du fait qu'Épiménide est lui-même crétois, on en déduit qu'Épiménide ment lorsqu'il affirme *tous les crétois sont des menteurs.* Cette proposition est donc fausse. On a donc prouvé que la proposition *tous les crétois sont des menteurs* est à la fois vraie (hypothèse) et fausse (conclusion), donc qu'elle est inconsistante.

Le théorème de Gödel entraîne un corollaire intéressant qui peut s'énoncer en ces termes :

Corollaire 1.6.1 *" Tout système formel est donc soumis à des limitations intrinsèques sur la quantité de "vérité" qu'il est capable de fournir" ([7], p. 256).*

En d'autres termes, pour établir la non-contradiction d'un système formel, il faut utiliser des moyens extérieurs et plus puissants que le système en question. Cette propriété est facilement mise en évidence dans le système formel MU, vu précédemment. Essayez par exemple de montrer que la formule MU n'est pas un théorème de MU (cf. MU-Puzzle, section 1.3). En fait, MU n'est pas un théorème du SF MU, mais il est impossible de le montrer par le biais de MU seul. Prouver que MU est un théorème de MU revient à engendrer l'ensemble des théorèmes de MU jusqu'à ce qu'on obtienne MU. Or MU ne faisant pas partie des théorèmes du système formel MU, et l'ensemble des théorèmes de MU étant infini, on est voué à l'échec. En revanche, on est susceptible, en utilisant l'arithmétique, d'établir une preuve de l'impossibilité d'obtenir la formule MU, en se basant sur la longueur des chaînes de I et de U produites par les règles de MU (cf. [4], p. 17). MU est donc semi-décidable.

1.6.2 Théorème de Tarski

Tarski (1902-1983) a montré qu'il était possible, sous certaines conditions, de formaliser la notion de vérité d'un système formel $\mathcal{S}_{F_1}$, par un autre système formel $\mathcal{S}_{F_2}$.

Théorème 1.6.3 - Thèorème de Tarski - *Pour tout système contenant une représentation de l'arithmétique, la notion de vérité ne peut être formalisée.*

1.7 Conclusion

Bien que les systèmes formels soient mis en défaut dès lors qu'ils tentent de formaliser des théories fondées sur l'arithmétique de Peano et que leurs limitations soient inhérentes à leur structure, ils n'en restent pas moins un procédé d'étude rigoureux d'un certain nombre de théories, en particulier les théories logiques (calcul propositionnel, calcul des prédicats).

[4]une proposition est réfutable si sa négation est prouvable.