La logique, calcul propositionnel et raisonnement de sens commun

Igor Stéphan

UFR Sciences Angers

2012-2013

La logique, calcul propositionnel et raisonnement de sens commun

Aristote

- 384 (Stagire, Grèce) - 322 (Chalcis, Grèce)
- *Organon* : instrument du savoir
- Raisonner c'est inférer
- Validité formelle/vérité factuelle
- Validité du fait de la seule structure

Inférence immédiate

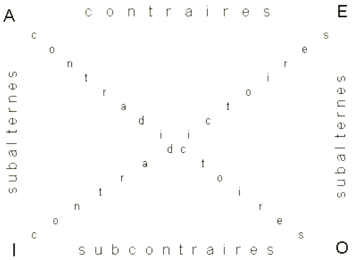
- proposition *catégorique* : Quantificateur Sujet copule Prédicat
- Quantificateur : quantité (≪ tout ≫, ≪ nul ≫, ≪ quelque ≫,. . .)
- Copule : qualité
- Prédicat : une fonction à valeur dans ≪ vrai ≫ ou ≪ faux ≫
- proposition (déclarative) : ce qui peut être ≪ vrai ≫ ou ≪ faux ≫
- AffIrmo et NegO (≪ J'affirme et je nie ≫)
- A (Universelle affirmative) : ≪ Tout X est Y ≫
- I (Particulière affirmative) : ≪ Quelque X est Y ≫
- E (Universelle négative) : ≪ Nul X n'est Y ≫
- O (Particulière négative) : ≪ Quelque X n'est pas Y ≫

Inférence immédiate

		A	E	I	O
A	vrai	-	faux	vrai	faux
E	vrai	faux	-	faux	vrai
I	vrai	?	faux	-	?
O	vrai	faux	?	?	-
A	faux	-	?	?	vrai
E	faux	?	-	vrai	?
I	faux	faux	vrai	-	vrai
O	faux	vrai	faux	vrai	-

A « Tous les hommes sont des animaux » est vrai
E « Nul homme est un animal » est faux
I « Quelques hommes sont des animaux » est vrai
O « Quelques hommes ne sont pas des animaux » est faux

Carré logique



- Opposition des contradictoires : affirmation universelle et sa négation particulière
- Opposition des contraires : affirmation universelle et sa négation universelle

Syllogisme

- « Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le fait de ces données »
- Sujet ou Prédicat : « Terme »
- grand (G), moyen (M) et petit (P) termes (de par son extension)
- Syllogisme :
  - trois propositions
  - deux prémisses (seules à évoquer le moyen terme)
  - une conclusion (Quantificateur P copule G)

Syllogismes : 3 figures

- Syllogisme $1^{ère}$ figure (4 modes) :

majeur	Quantificateur Moyen c Grand
mineur	Quantificateur Petit c Moyen
conclusion	Quantificateur Petit c Grand

- Syllogisme $2^{ème}$ figure (4 modes) :

majeur	Quantificateur Grand c Moyen
mineur	Quantificateur Petit c Moyen
conclusion	Quantificateur Petit c Grand

- Syllogisme $3^{ème}$ figure (4 modes) :

majeur	Quantificateur Moyen c Grand
mineur	Quantificateur Moyen c Petit
conclusion	Quantificateur Petit c Grand

Syllogisme $1^{ère}$ figure : 1/4 modes

- 1^{er} mode, AAA

  A Tout M est G
  A Tout P est M
  A Tout P est G

  A Tous les animaux sont mortels
  A Tous les hommes sont des animaux
  A Tous les hommes sont mortels

La logique, calcul propositionnel et raisonnement de sens commun

De la langue et de la logique

- « Un homme est sage »
  - « Tous les hommes sont sages » ou plus prosaïquement
  - « Je connais au moins un homme qui est sage » ?
- Auguste De Morgan (1806-1871)
- Georges Boole (1815-1864)
- Gottlob Frege (1848-1925)
- De la logique comme de l'algèbre

Logique classique

- Logique mathématique
  - Logique propositionnelle ou d'ordre zéro
  - Logique des prédicats ou du premier ordre
  - Logiques d'ordre supérieur
- Outil de modélisation de connaissances
- Une des clés du développement de l'ordinateur
- Une des clés du développement de l'informatique

Logique propositionnelle : la syntaxe

- Un ensemble de symboles propositionnels
- Deux constantes $\top$ et $\bot$
- Les connecteurs : la négation ($\neg$), la conjonction ($\wedge$), la disjonction ($\vee$), l'implication ($\rightarrow$) et la bi-implication ($\leftrightarrow$).
- Une formule est définie par :
  - $\top$ et $\bot$ sont des formules
  - si x est un symbole propositionnel alors x est une formule
  - si F est une formule alors $\neg F$ est une formule
  - si F et G sont des formules alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des formules

Logique propositionnelle : la sémantique

- **vrai** et **faux** sont les valeurs booléennes
- Une valuation v associe à chaque symbole propositionnel x une valeur booléenne $v(x)$
- Une formule est interprétée selon une valuation :
  - $i(x) = v(x)$
  - $i(\top) =$ **vrai** et $i(\bot) =$ **faux**
  - $i(\neg F) = i_{\neg}(i(F))$
  - $i((F \wedge G)) = i_{\wedge}(i(F), i(G))$
  - $i((F \vee G)) = i_{\vee}(i(F), i(G))$
  - $i((F \rightarrow G)) = i_{\rightarrow}(i(F), i(G))$
  - $i((F \leftrightarrow G)) = i_{\leftrightarrow}(i(F), i(G))$

La sémantique des connecteurs

x	$i_{\neg}(x)$
vrai	**faux**
faux	**vrai**

x	y	$i_{\wedge}(x, y)$
vrai	**vrai**	**vrai**
vrai	**faux**	**faux**
faux	**vrai**	**faux**
faux	**faux**	**faux**

x	y	$i_{\leftrightarrow}(x, y)$
vrai	**vrai**	**vrai**
vrai	**faux**	**faux**
faux	**vrai**	**faux**
faux	**faux**	**vrai**

La sémantique des connecteurs

x	y	$i_{\vee}(x, y)$
vrai	**vrai**	**vrai**
vrai	**faux**	**vrai**
faux	**vrai**	**vrai**
faux	**faux**	**faux**

x	y	$i_{\rightarrow}(x, y)$
vrai	**vrai**	**vrai**
vrai	**faux**	**faux**
faux	**vrai**	**vrai**
faux	**faux**	**vrai**

Équivalence de formules

- Deux formules F et G sont équivalentes ($F \equiv G$) si pour toute valuation, leurs interprétations sont égales
- $F \equiv F$
- si $F \equiv G$ et $G \equiv H$ alors $F \equiv H$
- $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$
- $\neg\neg F \equiv F$
- $(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$
- $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$
- $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
- $(F \leftrightarrow G) \equiv ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$
- $(F \wedge G) \equiv \neg(\neg F \vee \neg G)$
- $(F \vee G) \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G)$
- $(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$

Conséquence sémantique

- Une formule F est conséquence sémantique ($\Sigma \models F$) d'un ensemble de formules Σ si lorsque l'ensemble de formules est vrai pour une valuation, la formule conclusion doit aussi être vraie pour cette valuation
- Monotonie de la logique : Si $\Sigma \models F$ alors $\Sigma \cup \{H\} \models F$
- Déduction sémantique : $\Sigma \models (H \rightarrow F)$ si et seulement si $\Sigma \cup \{H\} \models F$

Théorie de la démonstration

- Système de déduction : ensemble de règles et d'axiomes
- Démontrer en partant des axiomes et en appliquant les règles
- Modus (ponendo) ponens : $\{F, (F \rightarrow G)\} \cup \Sigma \vdash G$
- Modus tollens : $\{\neg G, (F \rightarrow G)\} \cup \Sigma \vdash \neg F$
- Correction vis-à-vis d'une sémantique : ce qui est démontré est vrai
- Complétude vis-à-vis d'une sémantique : ce qui est vrai est démontrable

La logique, calcul propositionnel et raisonnement de sens commun

Raisonnement de sens commun

- Connaissances :
  - Les autruches sont des oiseaux qui ne volent pas
  - Les oiseaux volent sauf les autruches
  - Titi est une autruche
  - Toto est un oiseau
- Formalisation T_1 :
  - $(\forall x\ (autruche(X) \rightarrow (oiseau(X) \wedge \neg vole(X))))$
  - $(\forall x\ (oiseau(X) \rightarrow vole(X)))$
  - $autruche(Titi)$
  - $vole(Toto)$
- $T_1 \models vole(Titi)$ et $T_1 \models \neg vole(Titi)$

Raisonnement de sens commun

- Connaissances :
  - Les autruches sont des oiseaux qui ne volent pas
  - Les oiseaux volent sauf les autruches
  - Titi est une autruche
  - Toto est un oiseau
- Formalisation T_1 :
  - $(\forall x\ (autruche(X) \rightarrow (oiseau(X) \wedge \neg vole(X))))$
  - $(\forall x\ ((oiseau(X) \wedge \neg autruche(X)) \rightarrow vole(X)))$
  - $autruche(Titi)$
  - $vole(Toto)$
- Rien n'est plus déductible pour *Toto*
- La logique classique ne permet pas d'inférer lorsque le connaissance est incomplète, imparfaite, en évolution ou émanant de sources contradictoires.
- ≪ Logiques de sens commun ≫ : par essence, non-monotones

La logique, calcul propositionnel et raisonnement de sens commun

Conclusion

La logique : une discipline en devenir