

Exercice 1 Qui gagne le plus ?¹ Une fiche de paye est un couple (S, P) , S le salaire et P le montant des primes. Deux payes (S, P) et (S', P') sont égales si par définition $S = S'$ et $P = P'$.

Les relations suivantes sont-elles des ordres sur les payes :

- $(S, P)\mathcal{R}_1.(S', P') \leftrightarrow S \leq S' \vee P \leq P'$,
- $(S, P)\mathcal{R}_2.(S', P') \leftrightarrow S < S' \vee (S = S' \wedge P \leq P')$,

Correction 1 $\mathcal{R}_1$ définie par $(S, P)\mathcal{R}_1.(S', P') \equiv S \leq S' \vee P \leq P'$

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$ $(S, P)\mathcal{R}_1.(S, P) \equiv S \leq S \vee P \leq P$;

Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$ $(S, P)\mathcal{R}_1.(S', P') \wedge (S', P')\mathcal{R}_1.(S, P) \rightarrow (S, P) = (S', P')$?
Non, car $(1, 2)\mathcal{R}_1.(2, 1)$ et $(2, 1)\mathcal{R}_1.(1, 2)$ mais $(2, 1) \neq (1, 2)$.

Transitivité de $\mathcal{R}_1$

La relation $\mathcal{R}_1$ n'est pas un ordre pour la paye.

$\mathcal{R}_2$ définie par $(S, P)\mathcal{R}_2.(S', P') \equiv S < S' \vee (S = S' \wedge P \leq P')$

Réflexivité de $\mathcal{R}_2$ $(S, P)\mathcal{R}_2.(S, P) \equiv S < S \vee (S = S \wedge P \leq P)$

Antisymétrie de $\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned}
 & ((S, P)\mathcal{R}_2.(S', P')) \wedge ((S', P')\mathcal{R}_2.(S, P)) \\
 & \equiv (S < S' \vee (S = S' \wedge P \leq P')) \wedge \\
 & \quad (S' < S \vee (S' = S \wedge P' \leq P)) \\
 & \equiv (S < S' \wedge S' < S) \vee \\
 & \quad (S < S' \wedge (S' = S \wedge P' \leq P)) \vee \\
 & \quad (S' < S \wedge (S = S' \wedge P \leq P')) \vee \\
 & \quad ((S = S' \wedge P \leq P') \wedge (S' = S \wedge P' \leq P)) \\
 & \equiv (S = S' \wedge P \leq P' \wedge P' \leq P) \\
 & \equiv (S = S' \wedge P = P') \\
 & \equiv (S, P) = (S', P')
 \end{aligned}$$

¹extrait de “Logique et mathématiques pour l’informatique et l’I.A.”, C. Jacquemin, MASSON, pages 23-24.

Transitivité de $\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned}
& ((S, P)\mathcal{R}_2(S', P')) \wedge ((S', P')\mathcal{R}_2(S'', P'')) \\
& \equiv (S < S' \vee (S = S' \wedge P \leq P')) \wedge \\
& \quad (S' < S'' \vee (S' = S'' \wedge P' \leq P'')) \\
& \equiv (S < S' \wedge S' < S'') \vee \\
& \quad (S < S' \wedge (S' = S'' \wedge P' \leq P'')) \vee \\
& \quad (S' < S'' \wedge (S = S' \wedge P \leq P')) \vee \\
& \quad ((S = S' \wedge P \leq P') \wedge (S' = S'' \wedge P' \leq P'')) \\
& \equiv (S < S'') \vee (S < S'' \wedge P' \leq P'') \vee \\
& \quad (S < S'' \wedge P \leq P') \vee (S = S'' \wedge P \leq P'') \\
& \equiv (S < S'') \vee (S = S'' \wedge P \leq P'') \\
& \equiv (S, P)\mathcal{R}_2(S'', P'')
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{R}_2$ est un ordre pour la paye.

Exercice 2 *Considérons l'ensemble*

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

ordonné par

$$\{a \leq b, a \leq c, b \leq d, b \leq e\}$$

Déterminer

1. *les majorants et minorants,*
2. *le maximum, le minimum,*
3. *la borne supérieure et inférieure,*
4. *les éléments minimaux et maximaux, ainsi que*
5. *les chaînes non vides (maximales) et anti-chaînes non vides (maximales).*

de l'ensemble E .

Correction 2 *Éléments remarquable de $\{a, b, c, d, e\}$:*

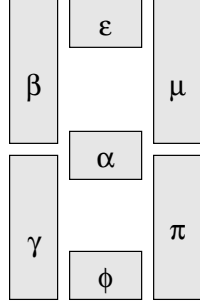
- L'ensemble des majorants de E dans E est $\emptyset$,
- L'ensemble des minorants de E dans E est $\{a\}$,
- E n'a pas de maximum,
- Le minimum de E est a ,
- E n'a pas de borne supérieure dans E ,
- La borne inférieure de E dans E est a ,
- L'ensemble des éléments maximaux de E est $\{d, e, c\}$,
- L'ensemble des éléments minimaux de E est $\{a\}$,
- Les chaînes non vides (maximales) de E sont $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{b, a\}$, $\{d, a\}$, $\{d, b\}$, $\{e, b\}$, $\{e, a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, d\}$, et $\{a, b, e\}$.
- Les anti-chaînes non vides (maximales) de E sont $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{d, e\}$, $\{c, d\}$, $\{e, c\}$, $\{b, c\}$ et $\{d, e, c\}$.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des digits sous forme de cristaux liquides :
 $E = \{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}\}.$

Nous définissons la relation $\mathcal{R}$ par $a \mathcal{R} b$ si b est obtenu à partir de a en allumant n ($n \in \mathbb{N}$) cristaux en plus.

- Montrer que cette relation est une relation d'ordre.
- Donner le diagramme de Hasse de $(E, \mathcal{R})$,
- Démontrer que $(E, \mathcal{R})$ est un treillis.

Correction 3 Nous nommons les différents cristaux pour coder les digits (et le vide) par des ensembles.



$$\begin{aligned}
E_{\beta} &= \{\beta, \gamma, \phi, \pi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\epsilon} &= \{\pi, \mu\} \\
E_{\mu} &= \{\alpha, \gamma, \phi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\alpha} &= \{\alpha, \phi, \pi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\phi} &= \{\alpha, \beta, \pi, \mu\} \\
E_{\pi} &= \{\alpha, \beta, \phi, \pi, \epsilon\} \\
E_{\gamma} &= \{\pi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\pi} &= \{\alpha, \beta, \gamma, \phi, \pi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\epsilon} &= \{\alpha, \beta, \phi, \pi, \mu, \epsilon\} \\
E_{\phi} &= \emptyset
\end{aligned}$$

Notre relation d'égalité : $x = y \equiv E_x = E_y$.

Notre relation d'ordre $\mathcal{R}$ se traduit alors :

$$\forall x, \forall y, x \in E, y \in E, x \mathcal{R} y \equiv E_x \subseteq E_y$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre : Soient $x, y, z \in E$,

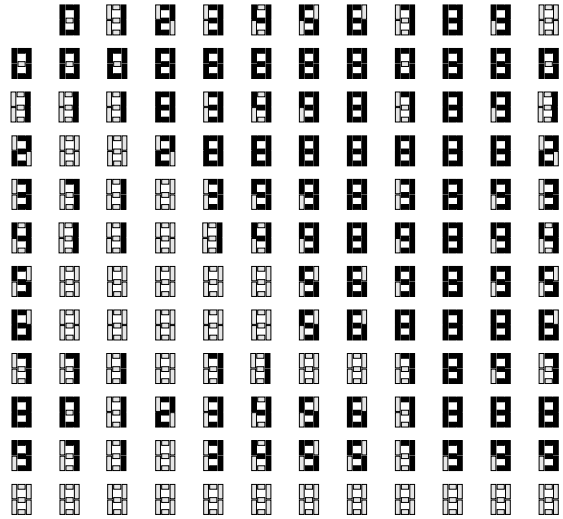
Réflexivité $x \mathcal{R} x \equiv E_x \subseteq E_x$,

$$\begin{aligned}
\text{Antisymétrie } x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x &\equiv (E_x \subseteq E_y) \wedge (E_y \subseteq E_x) \\
&\equiv E_x = E_y \\
&\equiv x = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Transitivité } x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z &\equiv (E_x \subseteq E_y) \wedge (E_y \subseteq E_z) \\
&\equiv (E_x \subseteq E_z) \\
&\equiv x \mathcal{R} z
\end{aligned}$$

Tableau des bornes supérieures et inférieures Les bornes supérieures sont inscrites dans la matrice diagonale supérieure tandis que les bornes in-

férieures sont inscrites dans la matrice diagonale inférieure.



Toute paire d'éléments de $(E, \mathcal{R})$ a une borne supérieure et une borne inférieure donc $(E, \mathcal{R})$ est un treillis.

Le diagramme de Hasse pour $(E, \mathcal{R})$:

