Exercice 2 *Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ trois relations binaires sur un ensemble E. Démontrer que*

- $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.
- $\overline{\mathcal{R}^{-1}} = \overline{\mathcal{R}}^{-1}$.
- $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R}'^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1}$
- $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{R}'^{-1}$.
- $(\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}')^{-1} = \mathcal{R}'^{-1} \cdot \mathcal{R}^{-1}$.

Correction 2

- $$\begin{array}{lll} \forall((e \in E \wedge e' \in E) & \rightarrow & \\ (e(\mathcal{R}^{-1})^{-1}e' & \leftrightarrow & e'\mathcal{R}^{-1}e \\ & \leftrightarrow & e\mathcal{R}e')) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lll} \forall((e \in E \wedge e' \in E) & \rightarrow & \\ (e\overline{\mathcal{R}^{-1}}e' & \leftrightarrow & (e, e') \notin \mathcal{R}^{-1} \\ & \leftrightarrow & (e', e) \notin \mathcal{R} \\ & \leftrightarrow & (e', e) \in \overline{\mathcal{R}} \\ & \leftrightarrow & e\overline{\mathcal{R}}^{-1}e')) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lll} \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} & \leftrightarrow & \forall e \forall e'((e \in E \wedge e' \in E) \rightarrow (e\mathcal{R}'e' \rightarrow e\mathcal{R}e')) \\ & \leftrightarrow & \forall e \forall e'((e \in E \wedge e' \in E) \rightarrow (e'\mathcal{R}'^{-1}e \rightarrow e'\mathcal{R}^{-1}e)) \\ & \leftrightarrow & \mathcal{R}'^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1} \end{array}$$

- $$\begin{array}{lll} \forall((e \in E \wedge e' \in E) & \rightarrow & \\ (e(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')^{-1}e' & \leftrightarrow & e'(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')e \\ & \leftrightarrow & e'\mathcal{R}e \vee e'\mathcal{R}'e \\ & \leftrightarrow & e\mathcal{R}^{-1}e' \vee e\mathcal{R}'^{-1}e' \\ & \leftrightarrow & e(\mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{R}'^{-1})e')) \end{array}$$

- $$\begin{array}{lll} \forall((e \in E \wedge e' \in E) & \rightarrow & \\ (e(\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}')^{-1}e' & \leftrightarrow & e'(\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}')e \\ & \leftrightarrow & \exists e''(e'' \in E \wedge e'\mathcal{R}e'' \wedge e''\mathcal{R}'e) \\ & \leftrightarrow & \exists e''(e'' \in E \wedge e''\mathcal{R}^{-1}e' \wedge e\mathcal{R}'^{-1}e'') \\ & \leftrightarrow & e(\mathcal{R}'^{-1} \cdot \mathcal{R}^{-1})e')) \end{array}$$

Exercice 3 *Soient l'ensemble* $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *et la loi de composition interne :*

$$(a,b)\#(c,d) \;=\; (ad+bc, bd)$$

Montrer que

- *la loi* # *est commutative,*
- $(E,\#)$ *est un monoïde,*

Soit la relation sur E définie par $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad = bc$. *Montrer que*

- $\sim$ *est une relation d'équivalence ;*
- $\sim$ *est une congruence pour* #.

Correction 3 *La loi* # *est commutative :*

$$\begin{aligned}(a,b)\#(c,d) &= (ad+bc, bd)\\ &= (c,d)\#(a,b)\end{aligned}$$

Pour que $(E,\#)$ *soit un monoïde il faut Associativité de* #

$$\begin{aligned}((a,b)\#(c,d))\#(e,f) &= (ad+bc, bd)\#(e,f)\\ &= ((ad+bc)f+(bd)e, (bd)f)\\ &= (adf+bcf+dbe, bdf)\\ &= (a(df)+b(cf+de), b(df))\\ &= (a,b)\#(cf+de, df)\\ &= (a,b)\#((c,d)\#(e,f))\end{aligned}$$

$(0,1)$ *élément neutre de* #

$$(a,b)\#(0,1) = (a\times 1 + b\times 0, b\times 1) = (a,b)$$

$\sim$ *est une relation d'équivalence :*
Réflexive :

$$(a,b) \sim (a,b) \leftrightarrow ab = ab$$

Symétrique : $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad = bc \leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$
Transitive :

$$\begin{aligned}(a,b) \sim (c,d) &\leftrightarrow ad = bc\\ (c,d) \sim (e,f) &\leftrightarrow cf = ed\end{aligned}$$

donc $adf = bed$ *donc* $af = be$ *donc* $(a, b) \sim (e, f)$.

La relation d'équivalence $\sim$ *est une congruence pour* $\#$ *:*

$$\begin{array}{rcl} ((a,b)\#(e,f)) \sim ((c,d)\#(g,h)) & \leftrightarrow & (af+be, bf) \sim (ch+dg, dh) \\ & \leftrightarrow & (af+be)dh = bf(ch+dg) \\ & \leftrightarrow & afdh + bedh = bfch + bfdg \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad = bc \\ (e,f) \sim (g,h) \leftrightarrow eh = fg \end{array}\right\} \\ \rightarrow (ad)(fh) + (eh)(bd) = (bc)(fh) + (fg)(bd) \\ \rightarrow ((a,b)\#(e,f)) \sim ((c,d)\#(g,h)) \end{array}$$