Exercice 1 *1. Soient A et B des parties de E*

$(A\cap\overline{B}) = (A\backslash B)$?

2. *Soient A et B des parties de E*

   $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq (A\cap B)$?

3. *Soient A et B des parties de E.*

   $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$?

4. *Soient A et B des parties de E.*

   $\overline{(A\cup B)} \subseteq \overline{(A\cap B)}$?

Correction 1 *1.*

$$\begin{aligned}(A\cap\overline{B}) = & \ \{e \in E/e \in A \ et \ e \notin B\} \\ = & \ (A\backslash B)\end{aligned}$$

2. *Supposons que $A \subseteq B$. Soit $e \in A$, or par hypothèse $A \subseteq B$ donc $e \in B$ donc $e \in (A\cap B)$ donc $A \subseteq (A\cap B)$.*

3. *Supposons que $A \subseteq B$. Soit $e \in \overline{B}$ donc $e \notin B$, or par hypothèse $A \subseteq B$ donc $e \notin A$ donc $e \in \overline{A}$ donc $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.*

4. $$\overline{(A\cup B)} = (\overline{A}\cap\overline{B}) \subseteq (\overline{A}\cup\overline{B}) = \overline{(A\cap B)}$$

Exercice 2 *Soient A, B, C trois parties de E. Montrons que :*

$$(((A\cup B) \subseteq (A\cup C)\wedge(A\cap B) \subseteq (A\cap C))\rightarrow B \subseteq C).$$

Quand a-t-on $B = C$?

Correction 2 *Par hypothèse $(A\cup B) \subseteq (A\cup C)$ or $B \subseteq (A\cup B)$ donc $B \subseteq (A\cup C)$. Par le lemme $X \subseteq Y \Rightarrow X \subseteq (X\cap Y)$, nous avons $B \subseteq ((A\cup C)\cap B)$ et par distributivité $B \subseteq ((B\cap A)\cup(B\cap C))$. De plus, par hypothèse $(A\cap B) \subseteq (A\cap C)$ et par ce qui précède $B \subseteq ((C\cap A)\cup(B\cap C))$. A nouveau par distributivité $B \subseteq (C\cap(A\cup B))$ or $(C\cap(A\cup B)) \subseteq C$ donc $B \subseteq C$.*

Nous venons de démontrer que

$$(((A\cup B) \subseteq (A\cup C)\wedge(A\cap B) \subseteq (A\cap C))\rightarrow B \subseteq C).$$

De même

$$(((A \cup C) \subseteq (A \cup B) \wedge (A \cap C) \subseteq (A \cap B)) \rightarrow C \subseteq B).$$

donc

$$(((A \cup C) = (A \cup B) \wedge (A \cap C) = (A \cap B)) \rightarrow C = B).$$

La réciproque est immédiate donc

$$(((A \cup C) = (A \cup B) \wedge (A \cap C) = (A \cap B)) \leftrightarrow C = B).$$

Exercice 3 *Soient A, B, C trois parties de E. Quelle relation y a-t-il entre*

$$\begin{array}{ll} i) & (A \Delta (B \cap C)) \text{ et } ((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) \\ ii) & (A \Delta (B \cup C)) \text{ et } ((A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \end{array}$$

Correction 3 *i) Soit $I = ((A \Delta B) \cap (A \Delta C))$. Par le lemme $(X \cap \overline{Y}) = (X \setminus Y)$ et la définition de Δ,*

$$I = (((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap ((A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}))),$$

puis par distributivité

$$\begin{array}{rcl} I & = & (((A \cap \overline{B}) \cap ((A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}))) \cup ((B \cap \overline{A}) \cap ((A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})))) \\ & = & (((A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}))) \cup ((A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{A}))) \\ & \cup & (((B \cap \overline{A}) \cap (A \cap \overline{C})) \cup ((B \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{A}))) \\ & = & (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \\ & = & ((A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cap C))) \end{array}$$

or par de Morgan $I = (A \cap (\overline{B \cup C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cap C))$, et par le lemme $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$, $I \subseteq (A \cap (\overline{B \cap C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cap C))$ donc $I \subseteq A \Delta (B \cap C)$, donc

$$(A \Delta B) \cap (A \Delta C) \subseteq A \Delta (B \cap C)$$

ii) Soit $II = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$. Par le lemme $X \cap \overline{Y} = X \setminus Y$ et la définition de Δ,

$$II = ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cup ((A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})),$$

puis par associativité de l'union

$$II = ((A \cap \overline{B}) \cup ((A \cap \overline{C})) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})),$$

puis par distributivité

$$II = (A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cup C)),$$

puis par de Morgan

$$II = (A \cap (\overline{B \cap C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cup C)).$$

Par le lemme $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$

$$(A \cap (\overline{B \cup C})) \cup (\overline{A} \cap (B \cup C)) \subseteq II$$

donc $A\Delta(B \cup C) \subseteq II$, *donc*

$$A\Delta(B \cup C) \subseteq (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$$

Exercice 4 *Soient 4 ensembles A,B, C et D, une bijection* $f : A \to B$, *une injection* $g : B \to C$ *et une bijection* $h : C \to D$. *Montrer qu'il existe une injection de A dans D.*

Correction 4 *Soit* $k : A \to D$ *avec* $k = h \circ g \circ f$.

- f *est bijective donc* $(\forall x \forall y\ (((x \in A) \wedge (y \in A)) \to ((f(x) = f(y)) \leftrightarrow (x = y))))$;
- g *est injective donc* $(\forall x \forall y\ (((x \in A) \wedge (y \in B)) \to ((g(x) = g(y)) \to (x = y))))$;
- h *est bijective donc* $(\forall x \forall y\ (((x \in A) \wedge (y \in A)) \to ((h(x) = h(y)) \leftrightarrow (x = y))))$.

Donc $(\forall x \forall y\ (((x \in A) \wedge (y \in A)) \to ((h \circ g \circ f(x) = h \circ g \circ f(y)) \to ((g \circ f(x) = g \circ f(y)) \to ((f(x) = f(y)) \to (x = y))))))$. *Donc* k *est injective.*

Une autre manière de corriger :

- f *est bijective donc* $|A| = |B|$;
- g *est injective donc* $|B| \leq |C|$;
- h *est bijective donc* $|C| = |D|$.

Donc $|A| \leq |B|$ donc il existe une injection de A dans D.

Exercice 5 *Dans une école les élèves étudient aucune, une ou deux langues étrangères. Sachant que :*

- *les cours d'Anglais sont suivis par 416 élèves ;*
- *les cours d'Allemand sont suivis par 212 élèves ;*
- *il y a 276 garçons dans l'école ;*
- *parmi les garçons 103 font de l'Anglais et 78 font de l'Allemand ;*
- *il y a 98 élèves qui font à la fois de l'Anglais et de l'Allemand et que parmi eux 30 sont des garçons.*

Exprimer et calculer le nombre de filles qui étudient au moins une des deux langues, Anglais ou Allemand.

Correction 5

- *les cours d'Anglais sont suivis par 416 élèves ($|An| = 416$) ;*
- *les cours d'Allemand sont suivis par 212 élèves ($|Al| = 212$) ;*
- *il y a 276 garçons dans l'école ($|G| = 276$) ;*
- *parmi les garçons 103 font de l'Anglais et 78 font de l'Allemand ($|GAn| = 103$ et $|GAl| = 78$);*
- *il y a 98 élèves qui font à la fois de l'Anglais et de l'Allemand et que parmi eux 30 sont des garçons ($|An \cap Al| = 98$ et $|GAn \cap GAl| = 30$).*

On note les filles qui font de l'Anglais FAn, les filles qui font de l'Allemand FAl.

$$\begin{aligned}
&|FAn \cup FAl| \\
&= |FAn| + |FAl| - |FAn \cap FAl| \\
&= |An| - |GAn| + |Al| - |GAl| - (|An \cap Al| - |GAn \cap GAl|) \\
&= 416 - 103 + 212 - 78 - (98 - 30) \\
&= 379
\end{aligned}$$

Exercice 6 *Montrer dans $\mathbb{R}^2$ qu'en choisissant 5 points de Gauss (points de coordonnées entières) alors nécessairement il existe un segment formé par deux des points tel que son milieu soit aussi un point de Gauss.*

Correction 6 *Soient l'ensemble G de nos 5 points de Gauss ($card(G) = 5$), l'ensemble $\mathbb{P}^2 = \{(pair, impair), (pair, pair), (impair, impair), (impair, pair)\}$ et la fonction f qui à un point de Gauss associe le couple des parités de ses coordonnées. $card(G) > card(\mathbb{P}^2) = 4$ donc il n'existe pas d'injection de G dans $\mathbb{P}^2$ donc en particulier il existe nécessairement deux points (x, y) et (x', y') de G tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$ et $(x, y) \neq (x', y')$.*

Soient :

$f((x, y)) = f((x', y')) = (pair, pair)$ *alors il existe $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p, y = 2q, x' = 2p'$ et $y' = 2q'$ et donc le milieu $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) = (\frac{2p+2p'}{2}, \frac{2q+2q'}{2}) = (p + p', q + q')$ est un point de Gauss ;*

$f((x, y)) = f((x', y')) = (pair, impair)$ *alors il existe $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p, y = 2q+1, x' = 2p'$ et $y' = 2q'+1$ et donc le milieu $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) = (\frac{2p+2p'}{2}, \frac{2q+1+2q'+1}{2}) = (p + p', q + q' + 1)$ est un point de Gauss ;*

$f((x, y)) = f((x', y')) = (impair, pair)$ *alors il existe $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p+1, y = 2q, x' = 2p'+1$ et $y' = 2q'$ et donc le milieu $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) = (\frac{2p+1+2p'+1}{2}, \frac{2q+2q'}{2}) = (p + p' + 1, q + q')$ est un point de Gauss ;*

$f((x, y)) = f((x', y')) = (impair, impair)$ *alors il existe $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p + 1, y = 2q + 1, x' = 2p' + 1$ et $y' = 2q' + 1$ et donc le milieu $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) = (\frac{2p+1+2p'+1}{2}, \frac{2q+1+2q'+1}{2}) = (p + p' + 1, q + q' + 1)$ est un point de Gauss.*