TD sur la complexité pratique

Igor Stéphan

20 mars 2000

Références

[JFD95] Y. Bertrand J.-F. Dufourd, D. Bechmann. *Spécification algébriques, algorithmique et programmation*. InterÉditions, 1995.

Un exemple simple

Calculons la complexié $T_{\texttt{proc}}(n)$ en nombre de `inst` de la procedure :

```
void proc ()
{
 int i,j,k;

 for (i=1 ; i<=n-1 ; i++)
   for (j = i+1 ; j <= n ; j++)
     for (k = 1 ; k <= j ; k++)
     inst;
}
```

$$T_{\texttt{proc}}(n) = \Sigma_{i=1}^{n-1}\Sigma_{j=i+1}^{n} j$$

or $\Sigma_{j=i+1}^{n} j = \Sigma_{j=1}^{n} j - \Sigma_{j=1}^{i} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$
donc

$$\begin{aligned}
T_{\texttt{proc}}(n) = & \ \Sigma_{i=1}^{n-1}(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}) \\
= & \ \Sigma_{i=1}^{n-1}(\frac{n(n+1)}{2}) - \Sigma_{i=1}^{n-1}(\frac{i(i+1)}{2}) \\
= & \ \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{n-1} i^2 - \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{n-1} i \\
= & \ \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{(n-1)(2n-1)n}{6} - \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} \\
= & \ \frac{(n-1)n}{2}((n+1) - \frac{(2n-1)}{6} - \frac{1}{2}) \\
= & \ \frac{(n-1)n}{2}(\frac{6n+6-2n+1-3}{6}) \\
= & \ \frac{(n-1)n}{2}(\frac{4n+4}{6}) \\
= & \ \frac{(n-1)n(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

Démontrons que $\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$n = 1$ $\Sigma_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

$n \geq 1$ $(\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}) \stackrel{?}{\Rightarrow} (\Sigma_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2})$.

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^{n+1} i = & \ (\Sigma_{i=1}^{n} i) + n + 1 \\ = & \ \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ = & \ \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Démontrons que $\Sigma_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

$n = 1$ $\Sigma_{i=1}^{n} i^2 = 1 = \frac{1(2*1+1)(1+1)}{6}$.

$n \geq 1$ $(\Sigma_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2}) \stackrel{?}{\Rightarrow} (\Sigma_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6})$.

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^{n+1} i = & \ (\Sigma_{i=1}^{n} i^2) + (n+1)^2 \\ = & \ \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ = & \ \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) \\ = & \ \frac{(n+1)}{6}(2n+3)(n+2)\end{aligned}$$

Un exemple un peu plus complexe

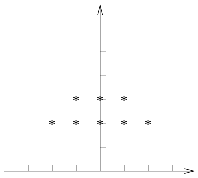
Nous désirons allumer des points sur un écran. Nous supposons connus la primitive `allumer` telle que `allumer(x,y)` allume le point de coordonnées `(x,y)` à l'écran[1]. Nous décrivons ci-dessous la procédure `fleche` :

```
procedure fleche(x, y, h : reel)
begin
   if (y >= h-2)
   then allumer(x,y)
   else begin
      fleche(x-1, y+1, h-1);
      fleche(x, y+1, h);
      fleche(x+1, y+1, h-1)
   end;
end fleche;
```

Soient $F(y)$ le nombre d'exécutions de la primitive `allumer` pour l'appel `fleche(x,y,h)`, $x, y, h \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ tel que $y + n < h \leq y + (n+1)$ et $\eta_i = F(y + (n - i))$ pour $0 \leq i \leq n$.

- Dessiner la figure révélée par l'appel `fleche(0,0,5)`. Combien y a-t-il d'exécutions de la primitive `allumer` ? Combien y a-t-il de points effectivement allumés ?

1. Nous supposerons que cet écran est infini.



Dans l'exécution de `fleche(0,0,5)`, le nombre d'exécutions de la primitive `allumer` est 11 pour 8 points allumés.

- Exprimer $F(y)$ en fonction des $F(y+k), k \geq 1$.

  $F(y) = F(y+1) + 2 * F(y+2)$.

- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n, \eta_i = \frac{2^{i+1}+(-1)^i}{3}$. En déduire $F(y)$ en fonction de n. Calculer $F(y)$ pour $n = 4$.

  Soit $n \geq 0$

  $n \geq i = 0$ $\eta_0 = F(y+n) = 1$.

  $n \geq i = 1$ $\eta_1 = F(y+(n-1)) = 1$.

  $n \geq i > 1$ Nous suppons que $\forall k < i, \eta_k = \frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3}$ et nous démontrons que $\eta_i = \frac{2^{i+1}+(-1)^i}{3}$.

$$\begin{aligned}
\eta_i &= F(y+(n-i)) \\
&= F(y+(n-i)+1) + 2 * F(y+(n-i)+2) \\
&= F(y+(n-(i-1))) + 2 * F(y+(n-(i-2))) \\
&= \eta_{i-1} + 2 * \eta_{i-2} \\
&= \frac{2^i+(-1)^{i-1}}{3} + 2 * \frac{2^{i-1}+(-1)^{i-2}}{3} \\
&= \frac{2^{i+1}}{3} + \frac{(-1)^{i-1}}{3} + \frac{2*(-1)^{i-2}}{3} \\
&= \frac{2^{i+1}}{3} + \frac{(-1)^{i-1}}{3}(1-2) \\
&= \frac{2^{i+1}}{3} + \frac{(-1)^{i}}{3}
\end{aligned}$$

  Donc $F(y) = F(y+(n-n)) = \eta_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}$ et $F(y) = 11$ pour $n = 4$.

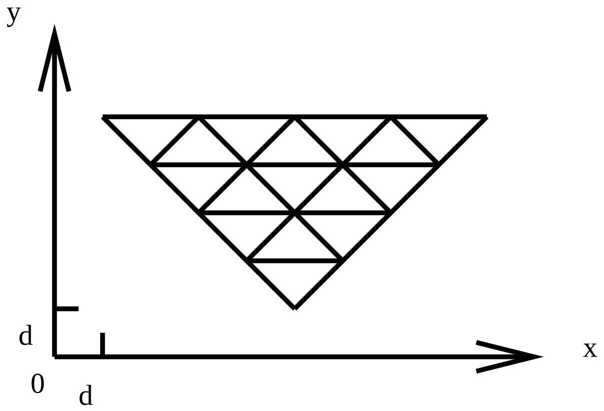
A mauvaise conception, complexité exponentielle

Nous désirons tracer une figure récursive à l'aide d'un crayon dans un repère euclidien. Nous supposons connus les primitives `placer(x,y)` qui place le crayon au point courant `(x,y)` et `tracer(x,y)` qui trace le segment joignant l'ancien point courant au nouveau point courant `(x,y)`. Nous décrivons ci-dessous la procédure `triangles1` :

```
procedure triangles1(x, y, d, h : reel);
begin
if (y + d < h) then
```

```
   begin
   tracer(x - d, y + d);
   triangles1(x - d, y + d, d, h);
   tracer(x + d, y + d);
   triangles1(x + d, y + d, d, h);
   tracer(x, y);
   end;
end triangles1;
```

La séquence `placer(x,y); triangles1(x, y, d, h)` avec `d` > 0 trace le dessin ci-dessous.



Nous notons $N_1(y)$ le nombre d'exécutions de la primitive `tracer` pour l'appel `triangles1(x, y, d, h)` avec `d` > 0 Evaluer $N_1(y)$ en fonction de $N_1(y+d)$.

$$N_1(y) = 2N_1(y+d) + 3$$

Soient n tel que $y + nd < h \leq y + (n+1)d$ et $\eta_i = N_1(y + (n-i)d)$ pour $0 \leq i \leq n$. Montrer par récurrence que $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i((0 \leq i \leq n) \Rightarrow \eta_i = 3(2^i - 1)))$. En déduire $N_1(y)$ en fonction de n. Discuter ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons par récurrence que $\forall i((0 \leq i \leq n) \Rightarrow \eta_i = 3(2^i - 1))$.

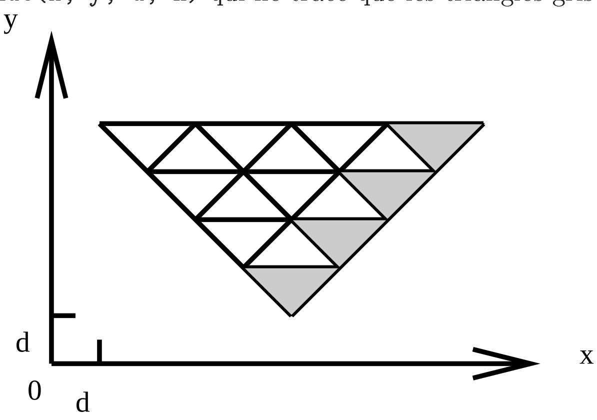
$i = 0$ $\eta_0 = N_1(y + nd) = 0 = 3(2^0 - 1)$.

$0 < i \leq n$ Nous supposons que $\eta_{i-1} = 3(2^{i-1} - 1))$ et nous démontrons que $\eta_i = 3(2^i - 1))$.

Par définition $\eta_i = N_1(y + (n-i)d)$ or $N_1(y') = 2N_1(y' + d) + 3$ donc $\eta_i = 2N_1(y + (n-i)d + d) + 3 = 2N_1(y + (n - (i-1))d) + 3$ or par hypothèse de récurrence $N_1(y + (n - (i-1))d) = \eta_{i-1} = 3(2^{i-1} - 1)$ donc $\eta_i = 2(3(2^{i-1} - 1)) + 3 = 3(2^i - 1)$.

Donc $N_1(y) = 3(2^n - 1)$. Les deux appels a triangles tracent deux fois les mêmes triangles intérieurs (et ce récursivement) induisant une complexité exponentielle.

Nous désirons améliorer le traçage du dessin. Nous définissons une procédure `bande(x, y, d, h)` qui ne trace que les triangles grisés du dessin ci-dessous.



Ecrire en algorithmique impérative la procédure `bande`. Ecrire une procédure récursive `triangle2`, en utilisant la procédure `bande`, qui trace chaque triangle du dessin une seule fois.

```
procedure bande(x, y, d, h :reel);
begin
if (y + d < h) then
   begin
   tracer(x - d, y + d);
   tracer(x + d, y + d);
   bande(x + d, y + d, d, h);
   tracer(x, y);
   end
end

procedure triangles2(x, y, d, h :reel);
begin
if (y + d < h) then
   begin
   bande(x, y, d, h);
   placer(x - d, y + d);
   triangles2(x - d, y + d, d, h);
   end
end
```

Nous notons $B(y)$ le nombre d'exécutions de la primitive `tracer` pour l'appel `bande(x, y, d, h)` et $N_2(y)$ le nombre d'exécutions de la primitive `tracer` pour l'appel `triangles2(x, y, d, h)` avec `d` > 0. Evaluer $B(y + (n - i)d)$ et $N_2(y + (n - i)d)$, pour $0 \leq i \leq n$. En déduire $B(y)$ et $N_2(y)$ en fonction de n. Comparer et commenter les résultats de $N_1(y)$ et $N_2(y)$.

$B(y) = B(y+d)+3$ et $N_2(y) = B(y)+N_2(y+d)$. Montrons que $B(y+(n-i)d) = 3i$ et $N_2(y+(n-i)d) = \frac{3}{2}(i(i+1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons par récurrence que $\forall i((0 \leq i \leq n) \Rightarrow B(y+(n-i)d) = 3i)$

$i = 0$ $B(y+(n-0)d) = B(y+dn) = 0 = 3 * 0$.

$0 < i \leq n$ Nous supposons que $B(y+(n-(i-1))d) = 3(i-1)$ et nous démontrons que $B(y+(n-i)d) = 3i$.

$B(y+(n-i)d) = B(y+(n-i)d+d)+3 = B(y+(n-(i-1))d)+3$ or par hypothèse de récurrence $B(y+(n-(i-1))d) = 3(i-1)$ donc $B(y+(n-i)d) = 3(i-1)+3 = 3i$.

et que $\forall i((0 \leq i \leq n) \Rightarrow N_2(y+(n-i)d) = \frac{3}{2}(i(i+1))$

$i = 0$ $N_2(y+(n-0)d) = N_2(y+dn) = 0 = \frac{3}{2} * (0 * (0+1))$.

$0 < i \leq n$ Nous supposons que $N_2(y+(n-(i-1))d) = \frac{3}{2}i(i-1)$ et nous démontrons que $N_2(y+(n-i)d) = \frac{3}{2}i(i+1)$.

$N_2(y+(n-i)d) = B(y+(n-i)d) + N_2(y+(n-i)d+d) = B(y+(n-i)d) + N_2(y+(n-(i-1))d)$ or par hypothèse de récurrence $N_2(y+(n-(i-1))d) = \frac{3}{2}(i-1)i$ et d'autre part $B(y+(n-i)d) = 3i$ donc $N_2(y+(n-i)d) = 3i + \frac{3}{2}(i(i-1)) = \frac{3}{2}(i(i+1))$.

Donc $N_2(y) = \frac{3}{2}n(n+1)$.

La complexité de `triangles2` n'est que quadratique alors que la complexité de `triangles1` est exponentielle car avec `triangles2` les triangles ne sont tracés qu'une seule fois.