TD sur les fonctions récursives

Igor Stéphan

16 mars 1999

Références

1 Des fonctions primitives récursives

Quelques fonctins arithmétiques primitives récursives.

– L'addition est primitive récursive :

$$plus = \lambda n \lambda m(\quad \begin{array}{l} if\ (=\ m\ (\sigma\ m')) \\ then\ (h_{plus}\ (plus\ n\ m')\ n\ m') \\ else\ (\pi_1^1\ n)) \end{array}$$

avec $h_{plus} = \lambda r \lambda n \lambda m(\sigma\ (\pi_1^3\ r\ n\ m)))$.

– La multiplication est primitive récursive :

$$fois = \lambda n \lambda m(\quad \begin{array}{l} if\ (=\ m\ (\sigma\ m')) \\ then\ (h_{fois}\ (fois\ n\ m')\ n\ m') \\ else\ (\pi_2^2\ n\ \overline{0}) \end{array}$$

avec $h_{fois} = \lambda r \lambda n \lambda m(plus\ (\pi_1^3\ r\ n\ m)\ (\pi_2^3\ r\ n\ m))$.

– La factorielle est primitive récursive :

$$fact = \lambda m(\quad \begin{array}{l} if\ (=\ m\ (\sigma\ m')) \\ then\ (h_{fact}\ (fact\ m')\ m') \\ else\ \overline{1} \end{array}$$

avec $h_{fact} = \lambda r \lambda n(fois\ (\pi_1^2\ r\ n)\ (\sigma\ n))$.

– Le prédécesseur est primitif récursif :

$$pred = \lambda m(\quad \begin{array}{l} if\ (=\ m\ (\sigma\ m')) \\ then\ (h_{pred}\ (pred\ m')\ m') \\ else\ \overline{0} \end{array}$$

avec $h_{pred} = \lambda r \lambda m(\pi_2^2\ r\ m))$.

– La soustraction est primitive récursive :

$$moins = \lambda n \lambda m(\quad if\ (=\ m\ (\sigma\ m'))\ then\ (h_{moins}\ (moins\ n\ m')\ n\ m')\ else\ (\pi_1^1\ n))$$

avec $h_{moins} = \lambda r \lambda n \lambda m(pred(\pi_1^3\ r\ n\ m))$.

– Le produit borné est primitif récursif ($\Pi(f,m) = \lambda n_1 \ldots n_k \Pi_{i=0}^m f(n_1 \ldots n_k, i)$) :

Exemple pour $k = 0$:

$$\Pi_{f_0} = \lambda m(\quad if\ (=\ m\ (\sigma\ m'))\ then\ (h_{\Pi_{f_0}}\ (\Pi_{f_0}\ m')\ m')\ else\ g_{\Pi_{f_0}}).$$

avec $h_{\Pi_{f_0}} = \lambda r \lambda m(fois\ (f_0\ (\sigma\ (\pi_2^2\ r\ m)))\ (\pi_1^2\ r\ m))$ et $g_{\Pi_{f_0}} = (f_0\ \overline{0})$.

Cas général :

$$\Pi(f) = \lambda n_1 \ldots n_k \lambda m(\quad if\ (=\ m\ (\sigma\ m'))\ then\ (h_{\Pi(f)}\ (\Pi(f)\ n_1 \ldots n_k\ m')\ n_1 \ldots n_k\ m')\ else\ (g_{\Pi(f)}\ n_1 \ldots n_k)).$$

avec $h_{\Pi(f)} = \lambda r \lambda n_1 \ldots n_k \lambda m(fois \quad (f \quad (\pi_2^{k+2}\ r\ n_1 \ldots n_k\ m) \ldots (\pi_{k+1}^{k+2}\ r\ n_1 \ldots n_k\ m)\ (\sigma\ (\pi_{k+2}^{k+2}\ r\ n_1 \ldots n_k\ m)))\ (\pi_1^{k+2}\ r\ n_1 \ldots n_k\ m))$

et $g_{\Pi(f)} = \lambda n_1 \ldots n_k (f\ n_1 \ldots n_k\ \overline{0})$.

Soient f_{et}, f_{ou} et f_{non} les fonctions caractéristiques, respectivement, des prédicats *et*, *ou* et *non*.

$$f_{et}(f_1, f_2) = \lambda n_1 \ldots n_k (fois\ (f_1\ n_1 \ldots n_k)\ (f_2\ n_1 \ldots n_k))$$

$$f_{ou}(f_1, f_2) = \lambda n_1 \ldots n_k (f_{nonzero}\ (plus\ (f_1\ n_1 \ldots n_k)\ (f_2\ n_1 \ldots n_k)))$$

$$f_{non}(f_1) = \lambda n_1 \ldots n_k (moins\ \overline{1}\ (f_1\ n_1 \ldots n_k))$$