TD sur les fonctions récursives

Igor Stéphan

16 mars 1999

Références

1 Des fonctions primitives récursives

Quelques fonctins arithmétiques primitives récursives.

– L'addition est primitive récursive :

$$\begin{array}{rl} plus(n,m) = & if(m = \sigma(m')) \\ & then\ h_{plus}(plus(n,m'),n,m') \\ & else\ \pi^1_1(n) \end{array}$$

avec $h_{plus}(r,n,m) = \sigma(\pi^3_1(r,n,m))$.

– La multiplication est primitive récursive :

$$\begin{array}{rl} fois(n,m) = & if(m = \sigma(m')) \\ & then\ h_{fois}(fois(n,m'),n,m') \\ & else\ g_{fois}(n) \end{array}$$

avec $h_{fois}(r,n,m) = plus(\pi^3_1(r,n,m), \pi^3_2(r,n,m))$ et $g_{fois}(n) = \pi^2_2(n,\overline{0})$.

– La factorielle est primitive récursive :

$$\begin{array}{rl} fact(m) = & if(m = \sigma(m')) \\ & then\ h_{fact}(fact(m'),m') \\ & else\ \overline{1} \end{array}$$

avec $h_{fact}(r,n) = fois(\pi^2_1(r,n), \sigma(n))$.

– Le prédécesseur est primitif récursif :

$$\begin{array}{rl} pred(m) = & if(m = \sigma(m')) \\ & then\ h_{pred}(pred(m'),m') \\ & else\ \overline{0} \end{array}$$

avec $h_{pred}(r,m) = \pi^2_2(r,m)$.

- La soustraction est primitive récursive :

$$moins(n,m) = \begin{array}{l} if(m=\sigma(m')) \\ then\ h_{moins}(moins(n,m'),n,m') \\ else\ \pi_1^1(n) \end{array}$$

  avec $h_{moins}(r,n,m) = pred(\pi_1^3(r,n,m))$.

- Le produit borné est primitif récursif ($\Pi_f(n_1 \dots n_k, m) = \Pi_{i=0}^m f(n_1 \dots n_k, i)$) :

  Exemple pour $k=0$:

$$\Pi_{f_0}(m) = \begin{array}{l} if(m=\sigma(m')) \\ then\ h_{\Pi_{f_0}}(\Pi_{f_0}(m'),m') \\ else\ g_{\Pi_{f_0}}. \end{array}$$

  avec $h_{\Pi_{f_0}}(r,m) = fois(f_0(\sigma(\pi_2^2(r,m))), \pi_1^2(r,m))$ et $g_{\Pi_{f_0}} = f_0(\overline{0})$.

  Cas général :

$$\Pi_f(n_1 \dots n_k, m) = \begin{array}{l} if(m=\sigma(m')) \\ then\ h_{\Pi_f}(\Pi_f(n_1 \dots n_k, m'), n_1 \dots n_k, m') \\ else\ g_{\Pi_f}(n_1 \dots n_k)). \end{array}$$

  avec $h_{\Pi_f}(r, n_1 \dots n_k, m) = fois(\ f(\ \pi_2^{k+2}(r,n_1 \dots n_k,m), \dots, \pi_{k+1}^{k+2}(r,n_1 \dots n_k,m)$
  $\sigma(\pi_{k+2}^{k+2}(r,n_1 \dots n_k,m))),$
  $\pi_1^{k+2}(r,n_1 \dots n_k,m))$

  et $g_{\Pi_f}(n_1 \dots n_k) = f(n_1 \dots n_k, \overline{0})$.

Soient f_{et}, f_{ou} et f_{non} les fonctions caractéristiques, respectivement, des prédicats *et*, *ou* et *non*.

$$f_{et}(f_1,f_2)(n_1 \dots n_k) = fois(f_1(n_1 \dots n_k), f_2(n_1 \dots n_k))$$

$$f_{ou}(f_1,f_2)(n_1 \dots n_k) = f_{nonzero}(plus(f_1(n_1 \dots n_k), f_2(n_1 \dots n_k)))$$

$$f_{non}(f)(n_1 \dots n_k) = moins(\overline{1}, f(n_1 \dots n_k))$$