TD sur les Automates finis et les Automates à pile

Igor Stéphan

2 mars 1999

Références

[Wol91] P. Wolper. *Introduction à la calculabilité.* InterÉditions, 1991.

1 Automates finis

1.1 Automates finis déterministes

Construire un AFD M sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui accepte le langage $L(M) = \{w \mid w \text{ ne contient pas consécutivement 2 } a\}$.

L'AFD M est défini par :

$$\begin{aligned} M = (\ & \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \\ & \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, q_0), (q_1, a, q_2), (q_1, b, q_0), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_2)\}, \\ & q_0, \{q_0, q_1\}) \end{aligned}$$

Déterminer l'automate fini déterministe M qui accepte le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels que le nombre d'occurrences de b soit divisible par 3.

L'AFD M est défini par :

$$\begin{aligned} (\ & \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \\ & \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_0)\}, \\ & q_0, \{q_0\}) \end{aligned}$$

Déterminer l'automate fini déterministe M qui accepte le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels qu'ils contiennent exactement un b.

L'AFD M est défini par :

$$\begin{aligned}(\ & \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \\ & \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_2)\}, \\ & q_0, \{q_1\})\end{aligned}$$

1.2 Automates finis non-déterministes

Construire un AFND M sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui accepte le langage $L(M) = \{w \mid w \text{ se termine par } ab\}$.

L'ADNF M est défini par :

$$\begin{aligned}(\ & \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \\ & \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_1, a, q_0), (q_2, a, q_0), (q_2, b, q_0)\}, \\ & q_0, \{q_2\})\end{aligned}$$

1.3 Des AFD aux AFND

Construire un AFD équivalent à l'AFND suivant :

$$\begin{aligned}M = (\ & \{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \\ & \delta = \{(q_0, 0, q_0), (q_0, 0, q_1), (q_0, 1, q_1), (q_1, 1, q_0), (q_1, 1, q_1)\}, \\ & q_0, \{q_1\}).\end{aligned}$$

L'AFD suivant est équivalent à l'AFND ci-dessus.

$$\begin{aligned}&\delta'(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_1\}, \\ &\delta'(\{q_0\}, 1) = \{q_1\}, \\ &\delta'(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}, \\ &\delta'(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}, \\ &\delta'(\{q_1\}, 1) = \{q_0, q_1\}\end{aligned}$$

donc

$$(\{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}\}, \{0, 1\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_1\}, \{q_0, q_1\}\})$$

Construire un AFD équivalent à l'AFND suivant :

$$\begin{aligned}M = (\ & \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \\ & \delta = \{ \ (q_0, a, q_1), (q_0, b, q_3), \\ & \qquad (q_1, a, q_3), (q_1, a, q_2), \\ & \qquad (q_2, b, q_1), \\ & \qquad (q_3, a, q_1), (q_3, a, q_3), (q_3, b, q_4), \\ & \qquad (q_4, b, q_3), (q_4, a, q_1), (q_4, a, q_2)\}, \\ & q_0, \{q_4\}).\end{aligned}$$

L'AFD suivant est équivalent à l'AFND ci-dessus.

$$
\begin{aligned}
&\delta'(\{q_0\}, a) = \{q_1\},\\
&\delta'(\{q_0\}, b) = \{q_3\},\\
&\delta'(\{q_1\}, a) = \{q_2, q_3\},\\
&\delta'(\{q_3\}, a) = \{q_1, q_3\},\\
&\delta'(\{q_3\}, b) = \{q_4\},\\
&\delta'(\{q_2, q_3\}, a) = \{q_1, q_3\},\\
&\delta'(\{q_2, q_3\}, b) = \{q_1, q_4\},\\
&\delta'(\{q_1, q_3\}, a) = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_3\}, b) = \{q_4\},\\
&\delta'(\{q_4\}, a) = \{q_1, q_2\},\\
&\delta'(\{q_4\}, b) = \{q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_4\}, a) = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_4\}, a) = \{q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_2, q_3\}, a) = \{q_1, q_2, q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_2, q_3\}, b) = \{q_1, q_4\},\\
&\delta'(\{q_1, q_2\}, a) = \{q_2, q_3\},\\
&\delta'(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_1\},
\end{aligned}
$$

donc

$$(\{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_3\}, \{q_4\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2\}\}, \{a, b\}, \delta', \{q_0\}, \{\{q_4\}, \{q_1, q_4\}\})$$

2 Automates à pile

Décrire un automate à pile qui accepte le langage $\{ww^R\}$.

L'automate à pile suivant accepte le langage $\{ww^R\}$.

$$
\begin{aligned}
(\ &\{s, p, q\},\\
&\{a, b\},\\
&\{A, B, Z\},\\
&\{((s, a, \varepsilon), (s, A)), ((s, b, \varepsilon), (s, B)), ((s, \varepsilon, \varepsilon), (p, \varepsilon)),\\
&((p, a, A), (p, \varepsilon)), ((p, b, B), (p, \varepsilon)), ((p, \varepsilon, Z), (q, \varepsilon))\},\\
&Z,\\
&s,\\
&\{q\})
\end{aligned}
$$