Théorème du gonflement et langages non réguliers

Th.: Soit L un langage régulier infini. Alors $\exists u, v, w \in \Sigma^*, v \neq \varepsilon$ tels que $\forall n \geq 0, uv^n w \in L$.

Pr. Inf. Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ avec $\mid Q \mid = m$ et $x \in L(M)$ tel $|x| > m$. Alors $\exists q \in Q, uvw \in \Sigma^*$ et $f \in F$ tels que $x = uvw$ et $(s, x) \vdash_M^* (q, vw) \vdash_M^* (q, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon)$ donc $uv^*w \in L(M)$.

Th.: Soit L un langage régulier infini et soit $x \in L$ tel que $|x| \geq |Q|$, Q ensemble des états d'un automate non déterministe acceptant L. Alors $\exists u, v, w \in \Sigma^*, v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq |Q|$ tels que $uvw = x$ et $\forall n \geq 0, uv^n w \in L$.

Exemple : Le langage $L = a^{n^2}$ n'est pas régulier.

Exemple : Le langage $L = \{a^n \mid n \text{ premier}\}$ n'est pas régulier.

Exemple : Le langage $L = a^n b^n$ n'est pas régulier.