Caractérisation des langages réguliers

Th.: Un langage est régulier ssi
il est accepté par un automate fini ssi
il est généré par une grammaire régulière.

Expression régulière : descriptif,
Automate fini : analytique,
Grammaire régulière : génératif.

Langage régulier $\Rightarrow$ automate fini

Const.: Construisons par induction un AFND M_ξ à partir d'une expression régulière ξ ($M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Delta_i, s_i, F_i)$ automate pour l'expression
régulière α_i) :

- si $\xi = \emptyset$ alors $M_\xi = (\{q\}, \emptyset, \emptyset, q, \emptyset)$
- si $\xi = \varepsilon$ alors $M_\xi = (\{q\}, \emptyset, \emptyset, q, \{q\})$
- si $\xi = \sigma \in \Sigma$ alors

$$M_\xi = (\{q_0, q_1\}, \{\sigma\}, \{(q_0, \sigma, q_1)\}, q_0, \{q_1\})$$

- si $\xi = \alpha_1\alpha_2$ alors

$$\begin{aligned} M_\xi = (\ & Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ & \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(q, \varepsilon, s_2)/q \in F_1\}, s_1, F_2) \end{aligned}$$

- si $\xi = \alpha_1^*$ alors

$$\begin{aligned} M_\xi = (\ & Q_1 \cup \{s\}, \Sigma_1, \Delta_1 \cup \{(q, \varepsilon, s_1)/q \in F_1\}, \\ & s, F_2 \cup \{s\}) \end{aligned}$$

- si $\xi = \alpha_1 + \alpha_2$ alors

$$\begin{aligned} M_\xi = (\ & Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \\ & \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2) \end{aligned}$$

Automate fini $\Rightarrow$ Grammaire régulière

Const.: Construisons une grammaire régulière $G = (V_G, \Sigma_G, S_G, R_G)$ à partir d'un AFND $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ telle que $L(G) = L(M)$ comme suit :

- $V_G = Q \cup \Sigma$
- $\Sigma_G = \Sigma$
- $S_G = s$
- $R_G = \begin{array}{l} \{A \rightarrow wB / (A, w, B) \in \Delta\} \cup \\ \{A \rightarrow \varepsilon / A \in F\} \end{array}$

Grammaire régulière $\Rightarrow$ Automate fini

Const.: Construisons un AFND $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ à partir d'une grammaire régulière $G = (V_G, \Sigma_G, S_G, R_G)$ tel que $L(M) = L(G)$ comme suit :

- $Q = (V_G - \Sigma_G) \cup \{f\}$, $(f \notin V_G)$,
- $\Sigma = \Sigma_G$,
- $s = S_G$,
- $F = \{f\}$,
- $\Delta = \begin{array}{l} \{(A, w, B) / A \rightarrow wB \in R_G\} \cup \\ \{(A, w, f) / A \rightarrow w \in R_G\} \end{array}$