Automates à pile

def. Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, Z, s, F)$
- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un alphabet d'entrée,
- Γ est un alphabet de pile,
- $\Delta \subset ((Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*))$ la relation de transition (ensemble fini),
- $Z \in \Gamma$ est le symbole initial de la pile,
- $s \in Q$ l'état initial,
- $F \subseteq Q$ l'ensemble des états accepteurs.

M est un automate à pile.

exe.: Soit $P_1 = (\{s, p, q\}, \{a, b\}, \{A, Z\}, \Delta, Z, s, \{q\})$
avec Δ :{ $((s, a, \varepsilon), (s, A))$
$((s, \varepsilon, Z), (q, \varepsilon))$
$((s, b, A), (p, \varepsilon))$
$((p, b, A), (p, \varepsilon))$
$((p, \varepsilon, Z), (q, \varepsilon))$}

P_1 est un automate à pile.

Automates à pile (suite)

def.: Le triplet $(q, u, \beta) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ est une configuration.

def.: La configuration (q', w', α') est dérivable en une étape de la configuration (q, w, α) par l'automate à pile M (noté $(q, w, \alpha) \vdash_M (q', w', \alpha')$) si $w = uw', u \in \Sigma^*$, $\alpha = \beta\delta, \beta, \delta \in \Gamma^*$, $\alpha' = \gamma\delta, \gamma \in \Gamma^*$, et
$((q, u, \beta), (q', \gamma)) \in \Delta$.

exe.: $(p, baba, AAZ) \vdash_{P_1} (p, aba, AZ)$ par :
- $p = q$, $p = q'$, $w = baba$, $w' = aba$, $\alpha = AAZ$, $\alpha' = AZ$,
- $u = b$, $\beta = A$, $\gamma = \varepsilon$, $\delta = AZ$,
- $((p, b, A), (p, \varepsilon)) \in \Delta$,

def.: Une configuration C' est dérivable en plusieurs étapes de la configuration C par l'automate à pile M ($C \vdash_M^* C'$) si $\exists k \geq 0$ et $C_0, \ldots, C_k$ des configurations telles que
- $C = C_0$,
- $C' = C_k$,
- $C_i \vdash_M C_{i+1}, \forall i, 0 \leq i < k$.

Automates à pile (suite)

def.: L'exécution d'un automate à pile M sur un mot w est la suite des configurations $(s, w, Z) \vdash_M (q_1, w_1, \alpha_1) \vdash_M \ldots \vdash_M (q_n, \varepsilon, \gamma)$.

exe.: $(s, aabb, Z) \vdash^*_{P_1} (q, \varepsilon, Z)$:

configurations	transitions
$(s, aabb, Z)$	$((s, a, \varepsilon), (s, A))$
(s, abb, AZ)	$((s, a, \varepsilon), (s, A))$
(s, bb, AAZ)	$((s, b, A), (p, \varepsilon))$
(p, b, AZ)	$((p, b, A), (p, \varepsilon))$
(p, ε, Z)	$((p, \varepsilon, Z), (q, \varepsilon))$
$(q, \varepsilon, \varepsilon)$	

def.: Un mot est accepté par un automate à pile M si $(s, w, Z) \vdash^*_M (q, \varepsilon, \gamma)$ avec $q \in F$.

exe.: Le mot $aabb$ est accepté par l'automate à pile P_1.

Automates à pile (suite)

def.: Le langage accepté par un automate à pile M est l'ensemble $L(M)$ des mots acceptés par M.

exe.: L'automate à pile P_1 accepte le langage $\{a^n b^n / n \geq 0\}$.

exo.: Décrire un automate à pile qui accepte le langage $\{ww^R\}$.