1. *L'ensemble des connaissances du chercheur d'or est initialement* $C_0 = \{s11, \neg o11, \neg b11, v11, \neg w11, \neg a11, \neg t11\}$.

2. *Les formules de l'ensemble* O^+ *expriment que s'il n'y a pas d'odeur alors les cases adjacentes sont sans wumpus.*

$$
\begin{aligned}
O^+ = \{ & o^+_{11} : (\neg o11 \rightarrow (\neg w12 \wedge \neg w21)),\\
& o^+_{21} : \ (\neg o21 \rightarrow ((\neg w11 \wedge \neg w22) \wedge \neg w31)),\\
& o^+_{31} : \ (\neg o31 \rightarrow ((\neg w21 \wedge \neg w32) \wedge \neg w41)),\\
& o^+_{41} : \ (\neg o41 \rightarrow (\neg w31 \wedge \neg w42)),\\
& o^+_{12} : \ (\neg o12 \rightarrow ((\neg w11 \wedge \neg w22) \wedge \neg w13)),\\
& o^+_{22} : \ (\neg o22 \rightarrow ((\neg w21 \wedge \neg w12) \wedge (\neg w32 \wedge \neg w23))),\\
& o^+_{32} : \ (\neg o32 \rightarrow ((\neg w31 \wedge \neg w22) \wedge (\neg w42 \wedge \neg w33))),\\
& o^+_{42} : \ (\neg o42 \rightarrow ((\neg w41 \wedge \neg w32) \wedge \neg w43)),\\
& o^+_{13} : \ (\neg o13 \rightarrow ((\neg w12 \wedge \neg w23) \wedge \neg w14)),\\
& o^+_{23} : \ (\neg o23 \rightarrow ((\neg w22 \wedge \neg w13) \wedge (\neg w33 \wedge \neg w24))),\\
& o^+_{33} : \ (\neg o33 \rightarrow ((\neg w32 \wedge \neg w23) \wedge (\neg w43 \wedge \neg w34))),\\
& o^+_{43} : \ (\neg o43 \rightarrow ((\neg w42 \wedge \neg w33) \wedge \neg w44)),\\
& o^+_{14} : \ (\neg o14 \rightarrow (\neg w13 \wedge \neg w24)),\\
& o^+_{24} : \ (\neg o24 \rightarrow ((\neg w23 \wedge \neg w14) \wedge \neg w34)),\\
& o^+_{34} : \ (\neg o34 \rightarrow ((\neg w33 \wedge \neg w24) \wedge \neg w44)),\\
& o^+_{44} : \ (\neg o44 \rightarrow (\neg w43 \wedge \neg w34))\}
\end{aligned}
$$

Les formules de l'ensemble B^+ *expriment que s'il n'y a pas de brise alors les cases adjacentes sont sans abysse. Elles sont sur le même modèle que les précédentes.*

$$
\begin{array}{l}
B^+ = \{ \\
\quad \begin{array}{ll}
b^+_{11}: & (\neg b11 \rightarrow (\neg a12 \wedge \neg a21)), \\
b^+_{21}: & (\neg b21 \rightarrow ((\neg a11 \wedge \neg a22) \wedge \neg a31)), \\
b^+_{31}: & (\neg b31 \rightarrow ((\neg a21 \wedge \neg a32) \wedge \neg a41)), \\
b^+_{41}: & (\neg b41 \rightarrow (\neg a31 \wedge \neg a42)), \\
b^+_{12}: & (\neg b12 \rightarrow ((\neg a11 \wedge \neg a22) \wedge \neg a13)), \\
b^+_{22}: & (\neg b22 \rightarrow ((\neg a21 \wedge \neg a12) \wedge (\neg a32 \wedge \neg a23))), \\
b^+_{32}: & (\neg b32 \rightarrow ((\neg a31 \wedge \neg a22) \wedge (\neg a42 \wedge \neg a33))), \\
b^+_{42}: & (\neg b42 \rightarrow ((\neg a41 \wedge \neg a32) \wedge \neg a43)), \\
b^+_{13}: & (\neg b13 \rightarrow ((\neg a12 \wedge \neg a23) \wedge \neg a14)), \\
b^+_{23}: & (\neg b23 \rightarrow ((\neg a22 \wedge \neg a13) \wedge (\neg a33 \wedge \neg a24))), \\
b^+_{33}: & (\neg b33 \rightarrow ((\neg a32 \wedge \neg a23) \wedge (\neg a43 \wedge \neg a34))), \\
b^+_{43}: & (\neg b43 \rightarrow ((\neg a42 \wedge \neg a33) \wedge \neg a44)), \\
b^+_{14}: & (\neg b14 \rightarrow (\neg a13 \wedge \neg a24)), \\
b^+_{24}: & (\neg b24 \rightarrow ((\neg a23 \wedge \neg a14) \wedge \neg a34)), \\
b^+_{34}: & (\neg b34 \rightarrow ((\neg a33 \wedge \neg a24) \wedge \neg a44)), \\
b^+_{44}: & (\neg b44 \rightarrow (\neg a43 \wedge \neg a34))\}
\end{array}
\end{array}
$$

Les formules de l'ensemble O^- expriment que s'il y a une odeur sur une case alors il y a un wumpus dans une case adjacente.

$$
\begin{array}{l}
O^- = \{ o^-_{11} : (o11 \rightarrow (w12 \vee w21)) \\
\quad \begin{array}{ll}
o^-_{21}: & (o21 \rightarrow ((w11 \vee w22) \vee w31)) \\
o^-_{31}: & (o31 \rightarrow ((w21 \vee w32) \vee w41)) \\
o^-_{41}: & (o41 \rightarrow (w31 \vee w42)) \\
o^-_{12}: & (o12 \rightarrow ((w11 \vee w22) \vee w13)) \\
o^-_{22}: & (o22 \rightarrow ((w21 \vee w12) \vee (w32 \vee w23))) \\
o^-_{32}: & (o32 \rightarrow ((w31 \vee w22) \vee (w42 \vee w33))) \\
o^-_{42}: & (o42 \rightarrow ((w41 \vee w32) \vee w43)) \\
o^-_{13}: & (o13 \rightarrow ((w12 \vee w23) \vee w14)) \\
o^-_{23}: & (o23 \rightarrow ((w22 \vee w13) \vee (w33 \vee w24))) \\
o^-_{33}: & (o33 \rightarrow ((w32 \vee w23) \vee (w43 \vee w34))) \\
o^-_{43}: & (o43 \rightarrow ((w42 \vee w33) \vee w44)) \\
o^-_{14}: & (o14 \rightarrow (w13 \vee w24)) \\
o^-_{24}: & (o24 \rightarrow ((w23 \vee w14) \vee w34)) \\
o^-_{34}: & (o34 \rightarrow ((w24 \vee w33) \vee w44)) \\
o^-_{44}: & (o44 \rightarrow (w43 \vee w34))\}
\end{array}
\end{array}
$$

Les formules de l'ensemble B^- expriment que s'il y a une brise sur une case alors des abysses dans une case adjacente. Elles sont sur le même modèle que les précédentes.

$$
\begin{array}{ll}
B^- = \{b^-_{11} : (b11 \rightarrow (a12 \vee a21)) & \\
b^-_{21} : & (b21 \rightarrow ((a11 \vee a22) \vee a31)) \\
b^-_{31} : & (b31 \rightarrow ((a21 \vee a32) \vee a41)) \\
b^-_{41} : & (b41 \rightarrow (a31 \vee a42)) \\
b^-_{12} : & (b12 \rightarrow ((a11 \vee a22) \vee a13)) \\
b^-_{22} : & (b22 \rightarrow ((a21 \vee a12) \vee (a32 \vee a23))) \\
b^-_{32} : & (b32 \rightarrow ((a31 \vee a22) \vee (a42 \vee a33))) \\
b^-_{42} : & (b42 \rightarrow ((a41 \vee a32) \vee a43)) \\
b^-_{13} : & (b13 \rightarrow ((a12 \vee a23) \vee a14)) \\
b^-_{23} : & (b23 \rightarrow ((a22 \vee a13) \vee (a33 \vee a24))) \\
b^-_{33} : & (b33 \rightarrow ((a32 \vee a23) \vee (a43 \vee a34))) \\
b^-_{43} : & (b43 \rightarrow ((a42 \vee a33) \vee a44)) \\
b^-_{14} : & (b14 \rightarrow (a13 \vee a24)) \\
b^-_{24} : & (b24 \rightarrow ((a23 \vee a14) \vee a34)) \\
b^-_{34} : & (b34 \rightarrow ((a24 \vee a33) \vee a44)) \\
b^-_{44} : & (b44 \rightarrow (a43 \vee a34))\}
\end{array}
$$

Les formules de l'ensembles S spécifient qu'une case est sûre si ete seulement si sur la case il n'y a ni wumpus ni abysses.

$$S = \{s_{xy} : ((\neg wxy \wedge \neg axy) \leftrightarrow sxy) | x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Nous noterons $\Sigma = O^+ \cup O^- \cup B^+ \cup B^- \cup S$.

3. *La valuation telle que tous les symboles propositionnels sxy sont valués à* **vrai** *(donc toutes les formules de S sont interprétées à* **vrai***) et tous les autres à* **faux** *(donc toutes les autres formules sont interprétées à* **vrai***) est un modèle pour $C_0 \cup \Sigma$ mais pas pour $\neg s22$. Donc $C_0 \cup \Sigma \not\models \neg s22$. La signification de ce modèle est qu'il n'y a ni wumpus, ni abysses dans le jeu.*
De même, la valuation v telle que $v(s22) =$ **faux** *et $v(a22) =$* **vrai***, tous les symboles propositionnels axy (hormis $a22$) sont valués à* **faux***, tous les symboles propositionnels sxy (hormis $s22$) sont valués à* **vrai***, tous les autres (hormis $b12$, $b23$, $b32$, $b21$) à* **faux** *et $v(b12) = v(b23) = v(b32) = v(b21) =$* **vrai***, est un modèle pour $C_0 \cup \Sigma$ mais pas pour $s22$. Donc $C_0 \cup \Sigma \not\models s22$.*

4. *Tout d'abord, pour tout modèle de* $C_0 \cup \Sigma$, v,

$$v(o11) = v(b11) = \textbf{faux}$$

donc par la règle o_{11}^{+}, $v^*((\neg w12 \wedge \neg w21)) = \textbf{vrai}$ *donc*

$$v^*(\neg w21) = v^*(\neg w12) = \textbf{vrai}$$

de même par la règle b_{11}^{+}, $v^*((\neg a12 \wedge \neg a21)) = \textbf{vrai}$ *donc*

$$v^*(\neg a21) = v^*(\neg a12) = \textbf{vrai}$$

donc $v^*((\neg w21 \wedge \neg a21)) = \textbf{vrai}$ *et* $v^*((\neg w12 \wedge \neg a12)) = \textbf{vrai}$.
Maintenant, $C_0 \cup \Sigma \models s21$ *si et seulement si, par le théorème 17,* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s21\}$ *est insatisfiable. Pour que* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s21\}$ *ait un modèle* v, *il faut que* $v(s21) = \textbf{faux}$, *mais par la règle* s_{21}, $v^*((\neg w21 \wedge \neg a21)) = \textbf{faux}$ *ce qui est contradictoire donc il n'existe pas de modèle donc* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s21\}$ *est insatisfiable et* $C_0 \cup \Sigma \models s21$.
De même, $C_0 \cup \Sigma \models s12$ *si et seulement si, par le théorème 17,* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s12\}$ *est insatisfiable. Pour que* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s12\}$ *ait un modèle* v, *il faut* $v(s12) = \textbf{faux}$, *mais par la règle* s_{12}, $v^*((\neg w12 \wedge \neg a12)) = \textbf{faux}$ *ce qui est contradictoire donc il n'existe pas de modèle donc* $C_0 \cup \Sigma \cup \{\neg s12\}$ *est insatisfiable et* $C_0 \cup \Sigma \models s12$.

5. *La connaissance intègre le fait que la case* $(2, 1)$ *est maintenant sûre et visitée et qu'il y a une brise mais pas d'odeur ni de trésor donc*

$$C_1 = C_0 \cup \{b21, \neg o21, v21, s21, \neg w21, \neg a21, \neg t21\}.$$

(Nous rajoutons aussi $s21$, $\neg w21$ *et* $\neg a21$ *à notre connaissance même si cela est inutile car c'est déjà conséquence de* $C_0 \cup \Sigma$*.) Par le théorème 19 de monotonie,* $C_1 \cup \Sigma \models s21$, $C_1 \cup \Sigma \models s12$ *et* $C_1 \cup \Sigma \models s11$. *Regardons si* $C_1 \cup \Sigma \models s22$ *: Il suffit de reprendre la valuation de la question 3 pour montrer qu'il existe un modèle pour* $C_1 \cup \Sigma$ *sans qu'elle soit un modèle pour* $s22$. *Donc* $C_1 \cup \Sigma \not\models s22$. *Regardons aussi* $C_1 \cup \Sigma \models s31$ *: La valuation* v *telle que* $v(s31) = \textbf{faux}$ *et* $v(a31) = \textbf{vrai}$, *tous les symboles propositionnels* axy *(hormis* $a31$*) sont valués à* **faux**, *tous les symboles propositionnels* sxy *(hormis* $s31$*) sont valués à* **vrai**, *tous les autres (hormis* $b21$, $b41$, $b32$*) sont valués à* **faux** *et* $v(b21) = v(b41) = v(b32) = \textbf{vrai}$, *est un modèle pour* $C_1 \cup \Sigma$ *mais pas pour* $s31$. *Donc* $C_1 \cup \Sigma \not\models s31$.
Seul $s12$ *est possible pour l'étape 5.*

6. *La connaissance intègre le fait que la case* $(1,2)$ *est maintenant sûre et visitée et qu'il y a une odeur mais pas de brise ni trésor donc*

$$C_2 = C_1 \cup \{o12, \neg b12, v12, s12, \neg w12, \neg a12, \neg t12\}.$$

Nous allons pouvoir prouver que $C_2 \cup \Sigma \models s22$*,* $C_2 \cup \Sigma \models \neg s31$ *et* $C_2 \cup \Sigma \models \neg s13$*.*
Tout d'abord, pour tout modèle quelconque de $C_2 \cup \Sigma$*,* v*,* $v(b12) = \mathbf{faux}$ *donc, par la règle* b_{12}^{+}*,*

$$v^*(((\neg a11 \wedge \neg a22) \wedge \neg a13)) = \mathbf{vrai}$$

donc $v^*(\neg a21) = \mathbf{vrai}$*,* $v^*(\neg a22) = \mathbf{vrai}$ *et* $v^*(\neg a13) = \mathbf{vrai}$ *donc* $v^*(a11) = \mathbf{faux}$*,* $v^*(a22) = \mathbf{faux}$ *et* $v^*(a13) = \mathbf{faux}$*.*
De même $v(o12) = \mathbf{vrai}$ *donc, par la règle* o_{12}^{-}*,*

$$v^*(((w11 \vee w22) \vee w13)) = \mathbf{vrai}$$

or $v^*(w11) = \mathbf{faux}$ *donc* $v^*((w22 \vee w13)) = \mathbf{vrai}$ *or* $v(o21) = \mathbf{faux}$ *donc par la règle* o_{21}^{+}*,*

$$v^*(((\neg w11 \wedge \neg w22) \wedge \neg w31)) = \mathbf{vrai}$$

donc $v^*(w22) = \mathbf{faux}$ *donc* $v^*(w13) = \mathbf{vrai}$*. (Nous venons de démontrer qu'un wumpus se cache en* $(1,3)$*.)*
De même $v(b21) = \mathbf{vrai}$ *donc, par la règle* b_{21}^{-}*,*

$$v^*(((a11 \vee a22) \vee a31)) = \mathbf{vrai}$$

or $v^*(a11) = \mathbf{faux}$ *et* $v^*(a22) = \mathbf{faux}$ *donc* $v^*(a31) = \mathbf{vrai}$*. (Nous venons de démontrer qu'il y a des abysses qui se cachent en* $(3,1)$*.)*

— $C_2 \cup \Sigma \models s22$ *si et seulement si, par le théorème 17,* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg s22\}$ *est insatisfiable. Pour que* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg s22\}$ *ait un modèle* v *il faut nécessairement, par la règle* s_{22} *que* $v^*((\neg w22 \wedge \neg a22)) = \mathbf{faux}$ *d'où une contradiction donc* $C_2 \cup \Sigma \models s22$*.*
— $C_2 \cup \Sigma \models \neg s31$ *si et seulement si, par le théorème 17,* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg\neg s31\}$ *est insatisfiable. Pour que* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg\neg s31\}$ *ait un modèle* v *il faut nécessairement, par la règle* s_{31} *que* $v^*((\neg w31 \wedge \neg a31)) = \mathbf{vrai}$ *d'où une contradiction (car* $v^*(a31) = \mathbf{vrai}$*) donc* $C_2 \cup \Sigma \models \neg s31$*.*

— $C_2 \cup \Sigma \models \neg s13$ *si et seulement si, par le théorème 17,* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg\neg s13\}$ *est insatisfiable. Pour que* $C_2 \cup \Sigma \cup \{\neg\neg s13\}$ *ait un modèle* v *il faut nécessairement, par la règle* s_{13} *que* $v^*((\neg w13 \wedge \neg a13)) =$ **vrai** *d'où une contradiction (car* $v^*(w13) =$ **vrai***) donc* $C_2 \cup \Sigma \models \neg s13$.

7. *La connaissance intègre le fait que la case* $(2, 2)$ *est maintenant sûre et visitée et qu'il y a ni odeur ni brise ni trésor donc*

$$C_3 = C_2 \cup \{\neg o22, \neg b22, v22, s22, \neg w22, \neg a22, w13, a31, \neg t31\}.$$

— $C_3 \cup \Sigma \models s23$ *si et seulement si* $C_3 \cup \Sigma \cup \{\neg s23\}$ *est insatisfiable. (La démonstration est similaire à celle de la question 4.) Tout d'abord, pour tout modèle de* $C_3 \cup \Sigma$, v, $v(o22) =$ **faux** *et* $v(b22) =$ **faux** *donc par la règle* o_{22}^{+},

$$v^*(((\neg w21 \wedge \neg w12) \wedge (\neg w32 \wedge \neg w23))) = \textbf{vrai}$$

donc $v^*(\neg w23) =$ **vrai** *; de même par la règle* b_{22}^{+},

$$v^*(((\neg a21 \wedge \neg a12) \wedge (\neg a32 \wedge \neg a23))) = \textbf{vrai}$$

donc $v^*(\neg a23) =$ **vrai** *donc* $v^*((\neg w23 \wedge \neg a23)) =$ **vrai**.
Pour que $C_3 \cup \Sigma \cup \{\neg s23\}$ *ait un modèle* v*, il faut que* $v(s23) =$ **faux***, mais par la règle* s_{23}, $v^*((\neg w23 \wedge \neg a23)) =$ **faux** *ce qui est contradictoire donc il n'existe pas de modèle donc* $C_3 \cup \Sigma \cup \{\neg s23\}$ *est insatisfiable et* $C_3 \cup \Sigma \models s23$.

— $C_3 \cup \Sigma \models s32$ *est possible mais comme nous disposons déjà d'une case sûre, nous la choisirons et si elle ne mène pas au trésor nous reviendrons sur cette possibilité.*

La connaissance intègre le fait que la case $(2, 3)$ *est maintenant sûre et visitée et qu'il y a une odeur et une brise mais surtout qu'il y a le trésor donc*

$$C_4 = C_3 \cup \{o23, b23, v23, s23, t23\}.$$

L'algorithme quitte donc la boucle avec un succès.